INTRODUZIONE ALLA GEOMETRIA ANALITICA
(Matrimonio tra Algebra e Geometria)

LA RETTA

Considerazioni preliminari

Data un'eq. di primo grado in due incognite, tanto per fissare le idee prendiamo la:

$$2x - y + 3 = 0 \qquad (1)$$

ricordiamo, che **una soluzione** di una tale equazione è una **coppia ordinata di numeri reali** tale che, rimpiazzando la variabile x col primo numero della coppia e la variabile y col secondo numero della coppia, succede che il primo membro diventa uguale al secondo.

Così la coppia ordinata $(2,3)$ non è una soluzione, infatti, rimpiazzando la variabile x col primo numero della coppia, cioè con 2, e la variabile y col secondo numero della coppia, cioè con 3 si ha:

$$2\cdot 2 - 3 + 3 = 0 \Rightarrow 4 = 0.$$

La coppia ordinata $(4,5)$ non è una soluzione, infatti si ha: $2\cdot 4 - 5 + 3 = 0 \Rightarrow 8 - 5 + 3 = 0 \Rightarrow 6 = 0$.

La coppia ordinata $(2,7)$ è una soluzione, infatti si ha: $2\cdot 2 - 7 + 3 = 0 \Rightarrow 4 - 7 + 3 = 0 \Rightarrow 0 = 0$.

La coppia ordinata $(-2,-1)$ è una soluzione: $2\cdot(-2) - (-1) + 3 = 0 \Rightarrow -4 + 1 + 3 = 0 \Rightarrow 0 = 0$.

La coppia ordinata $(0,3)$ è una soluzione: $2\cdot 0 - 3 + 3 = 0 \Rightarrow 0 = 0$.

La coppia ordinata $\left(-\frac{3}{2},0\right)$ è una soluzione: $2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) - 0 + 3 = 0 \Rightarrow -3 + 3 = 0 \Rightarrow 0 = 0$.

Si intuisce che sono infinite le coppie ordinate di numeri reali che soddisfano la (1), anzi, per individuarle in modo più agile, scriviamo la (1) nella forma:

$$y = 2x + 3. \qquad (2)$$

La (2), viene detta "forma esplicita" mentre la (1) "forma implicita".

Nella forma (2), per trovare una soluzione della (1), basta dare un qualsiasi valore alla x (costituirà il primo numero della coppia) fare i "conti", e si ottiene il secondo valore della coppia. Così, se alla x diamo per esempio 6 si ha: $2\cdot 6 + 3 = 12 + 3 = 15$ dunque la coppia ordinata $(6,15)$ è un'altra soluzione della (1) ancora, se alla x diamo per esempio -5 si ha: $2\cdot(-5) + 3 = -10 + 3 = -7$ dunque la coppia ordinata $(-5,-7)$ è un'altra soluzione della (1).

Riassumendo, abbiamo trovato già sei soluzioni della (1) e precisamente:

$$(2,7);\ (-2,-1);\ (0,3);\ \left(-\frac{3}{2},0\right);\ (6,15);\ (-5,-7).$$

Il lettore, dopo aver riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali monometrico (si consiglia di scegliere due quadretti come unità di misura) rappresenti i sei punti, (chiamiamoli pure A, B, C, D, E, F) aventi per coordinate, proprio le **coppie ordinate soluzioni dell'equazione** (1):

$$A(2,7);\ B(-2,-1);\ C(0,3);\ D\left(-\frac{3}{2},0\right);\ E(6,15);\ F(-5,-7).$$

Evidentemente i punti A, B, C, D, E, F risulteranno tutti allineati.
Ci chiediamo:

1. considerate altre soluzioni della (1), e rappresentando ancora i punti aventi per coordinate queste soluzioni, questi punti, saranno ancora allineati con A, B, C, D, E, F ?
2. se prendiamo un'altra equazione di primo grado in due incognite, succede la stessa cosa?

Le due domande hanno risposta affermativa entrambi.
Ci chiediamo ancora, visto che le soluzioni della (1) sono infinite, tutte queste infinite soluzioni, viste come coordinate di infiniti punti, danno sempre luogo a punti allineati con A, B, C, D, E, F ?
Naturalmente per rispondere a quest'ultima domanda, mica possiamo provarli tutti.
Ancora, se prendiamo un'altra equazione di primo grado in due incognite, possiamo vedere se succede o meno la stessa cosa e vediamo che succede, ma le equazione di primo grado in due incognite sono infinite, possiamo provare infinite volte se … .

Provi il lettore a trovare sei soluzioni dell'equazione $-2x + y - 4 = 0$, quindi riferire il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali monometrico e rappresentare i sei punti aventi per coordinate queste sei soluzioni.
Vale il seguente teorema:

A ogni retta del piano cartesiano corrisponde$^{(*)}$ **un'equazione di primo grado in due incognite e, viceversa, a ogni equazione di primo grado in due incognite corrisponde**$^{(*)}$ **una retta del piano cartesiano.**
Dim.: Si rimanda ad un qualsiasi manuale scolastico oppure al file Matrimonio tra rette ed equazioni di primo grado in due incognite.

Il lettore, proseguendo nello studio della Geometria Analitica, scoprirà, che anche ad una circonferenza per esempio, si può fare corrispondere$^{(**)}$ un'equazione, e precisamente un'eq. del tipo:

$$x^2 + y^2 + a\,x + b\,y + c = 0 \qquad (3)$$

Ingenerale, un'equazione in due incognite $p(x, y) = 0$, si dice che è l'equazione di una curva Γ (gamma) e si scrive: $\Gamma : p(x, y) = 0$, da leggersi, curva Γ di equazione $p(x, y) = 0$, se ogni punto di Γ ha coordinate soddisfacenti l'eq. $p(x, y) = 0$ e viceversa, ogni coppia ordinata soluzione dell'eq. $p(x, y) = 0$, vista come coordinate di punti, da luogo ad un punto che appartiene alla curva Γ.

$^{(*)}$ Corrisponde, nel senso che, un punto appartiene alla retta, se e soltanto se, le sue coordinate sono soluzione dell'equazione e viceversa, ogni coppia ordinata soluzione dell'equazione, vista come coordinate di punti, da luogo ad un punto che appartiene alla retta.

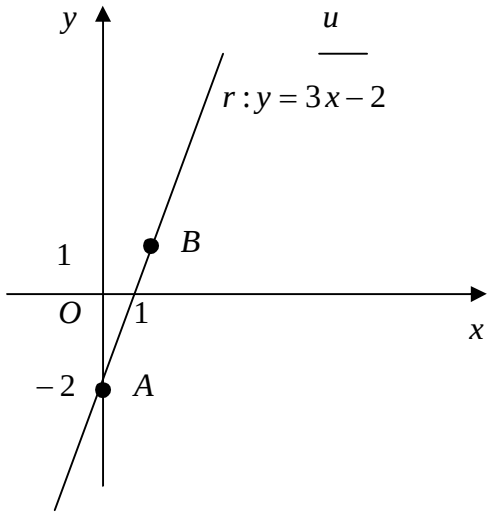
$^{(**)}$ Corrispondere, nel senso che, un punto appartiene alla circonferenza, se e soltanto se, le sue coordinate sono soluzione dell'equazione (3) e viceversa, ogni coppia ordinata soluzione dell'equazione (3), vista come coordinate di punti, da luogo ad un punto che appartiene alla circonferenza.

Esempi:

1. Rappresentare la $r: y = 3x - 2$ (retta r di equazione $y = 3x - 2$).

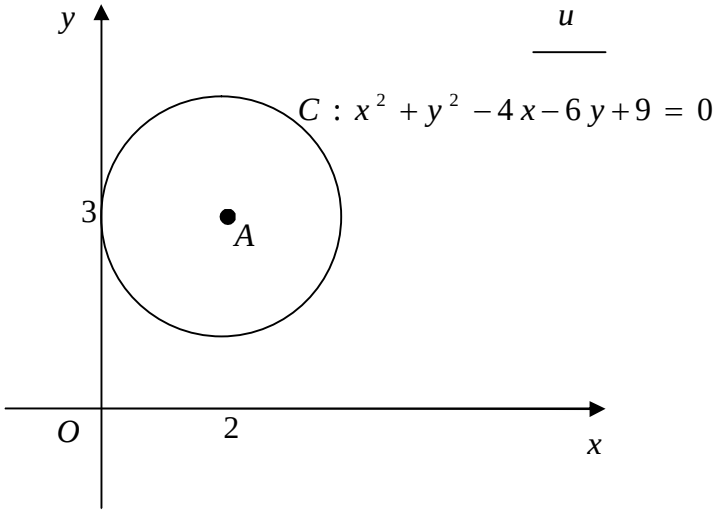
Svolgimento:

Basta trovare due soluzioni della $y = 3x - 2$, si vede facilmente che $(0,-2)$ e $(1,1)$ sono soluzioni, quindi rappresentiamo i punti $A(0,-2)$, $B(1,1)$ e tracciamo la retta che li contiene.



Un punto appartiene ad r, **se e soltanto se** le sue coordinate soddisfano l'eq. $y = 3x - 2$.

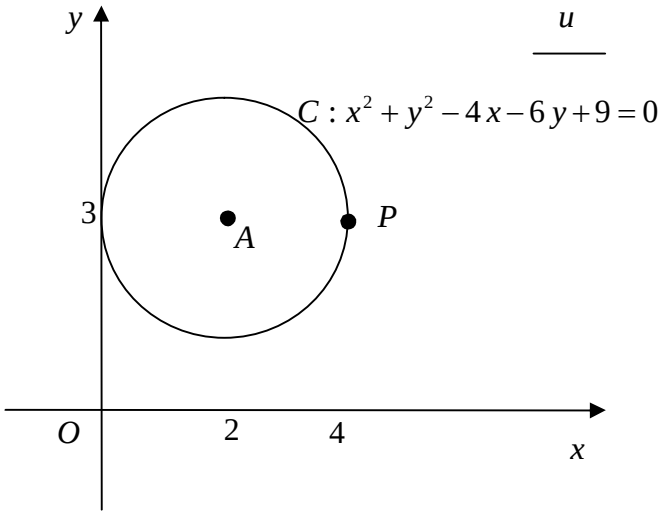
2. Andando avanti negli studi, il lettore scoprirà che, per esempio, la circonferenza di centro il punto $A(2,3)$ e raggio $r = 2$, avrà equazione: $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$.



Un punto appartiene a C, **se e soltanto se** le sue coordinate soddisfano l'eq.

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0.$$

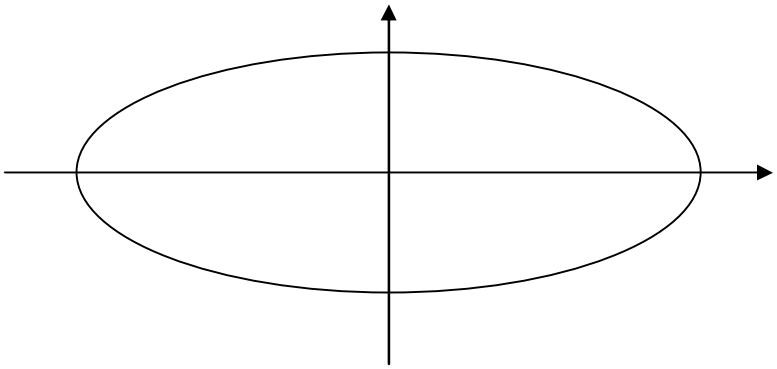
Così, per esempio, il punto $P(4,3)$ appartenendo evidentemente alla circonferenza C (vedasi figura sotto) ha coordinate tali da soddisfare l'equazione $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$,



infatti, si ha: $4^2 + 3^2 - 4\cdot 4 - 6\cdot 3 + 9 = 0 \Rightarrow 16 + 9 - 16 - 18 + 9 = 0 \Rightarrow 0 = 0$.

3. Anche la curva della figura seguente (Ellisse), avrà una sua equazione, che sarà del tipo:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



avrà una sua equazione, nel senso che: un punto appartiene all'ellisse , **se e soltanto se** le sue coordinate soddisfano l'eq. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.