

APPUNTI DI MATEMATICA
DI
Antonino Giardina

A **Luigi**, mio Padre
Senza la Tua vita spesa per me,
io non sarei stato ciò che sono.
Grazie Papà

IL LIMITE

Approccio intuitivo

Consideriamo la funzione:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

dov'è definita?

Evidentemente è definita nell'insieme:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\} \text{ quindi } f : A \rightarrow \mathbb{R},$$

cioè f è una funzione reale di una variabile reale definita in A a valori in $\mathbb{R}$.

Osserviamo che:

$$\forall x \in A \Rightarrow f(x) = g(x), \quad \text{dove } g(x) = x + 2;$$

infatti:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2 = g(x), \quad \forall x \in A.$$

Evidentemente $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cioè g è una funzione reale di una variabile reale definita in $\mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}$.

Rappresentiamo graficamente f e g :

x	y
0	2
2	4

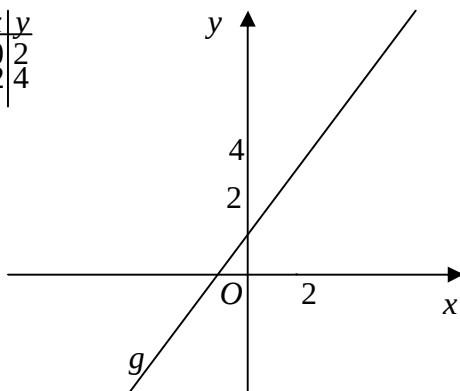


Figura 1

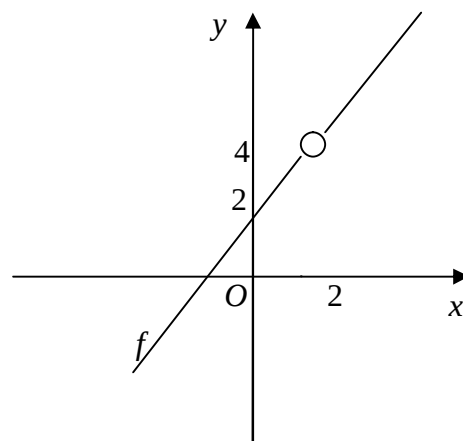


Figura 2

Consideriamo ora anche i seguenti grafici:

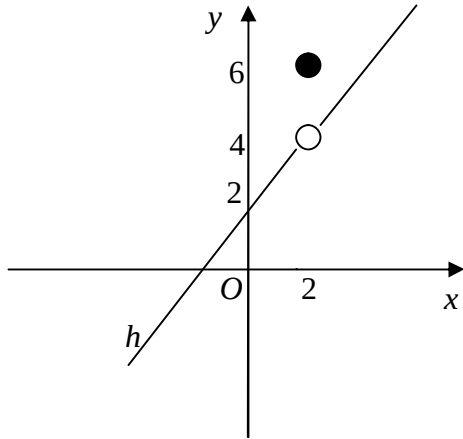


Figura 3

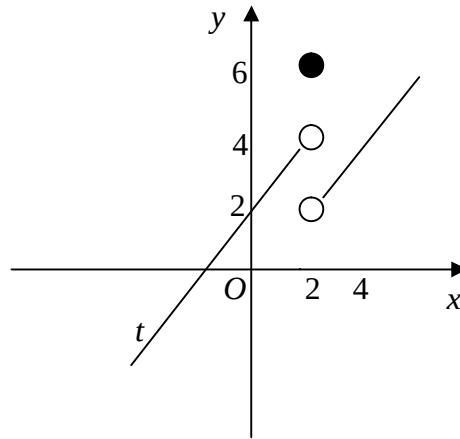


Figura 4

Che espressione analitica hanno le funzioni $h, t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?

Evidentemente si ha:

$$h(x) = \begin{cases} x+2 & \text{per } x \neq 2 \\ 6 & \text{per } x = 2 \end{cases}, \quad t(x) = \begin{cases} x+2 & \text{per } x < 2 \\ 6 & \text{per } x = 2 \\ x & \text{per } x > 2 \end{cases}.$$

Il lettore si chiederà, che “ci frega” della funzione f ?

Ebbene, la funzione f , può essere la traduzione di un problema fisico preciso, come il seguente.

La posizione di un'automobile che va sull'autostrada (considerata praticamente rettilinea) da Barcellona P.G. (ME) a Milazzo (ME), può essere individuata con sufficiente precisione, conoscendo la distanza che la divide dalla posizione iniziale (per esempio, il casello autostradale di Barcellona). Tale distanza dipende dal tempo:

indichiamo con $y = s(x)$, la legge oraria, dove x rappresenta il tempo trascorso da quando l'auto è partita da Barcellona. Se si conosce $s(x)$, come possiamo calcolare la velocità, cioè la variazione di $s(x)$ rispetto al tempo x ?

Osserviamo che è abbastanza facile calcolare la velocità media dell'auto, tra l'istante generico x e l'istante x_0 :

$$V_m = \frac{s(x) - s(x_0)}{x - x_0}; \quad (1)$$

Per essere più precisi, se $s(x) = x^2$ è la legge oraria dell'automobile, allora al tempo $x_0 = 2$ s, l'auto si trova a: $s(x_0) = x_0^2 = 2^2 = 4$ m, cioè a 4 metri dal punto di partenza, se vogliamo la velocità media, per esempio tra $x_0 = 2$ s e $x = 12$ s dobbiamo calcolare anche $s(x) = s(12) = 12^2 = 144$ e poi:

$$V_m = \frac{s(x) - s(x_0)}{x - x_0} = \frac{144 - 4}{12 - 2} = \frac{140}{10} = 14 \text{ m/s}$$

infatti il numeratore $144 - 4$ rappresenta i metri fatti dall'automobile nel tempo di: $12 - 2 = 10$ s .

In molti casi però, la velocità che ci interessa, è quella “istantanea”, per esempio in caso di incidente, non interessa sapere la velocità media ma la velocità nell’istante in cui avviene l’incidente. Ora se consideriamo, in generale, la velocità media tra l’istante $x_0 = 2\text{ s}$ e diversi valori di x si ha:

$$V_m = \frac{s(x) - s(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

Così se vogliamo la velocità media tra l’istante $x_0 = 2\text{ s}$ e l’istante $x = 45$ si ha:

$$V_m = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{45^2 - 4}{45 - 2} = \frac{2025 - 4}{43} = \frac{2021}{43} = 47\text{ m/s}.$$

Se volessimo la velocità all’istante $x_0 = 2\text{ s}$, dovremmo fare la velocità media tra $x_0 = 2\text{ s}$ e $x_0 = 2\text{ s}$ cioè dovremmo calcolare:

$$V_m = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0} = ?$$

La cosa “non è fattibile”, però possiamo “calcolare” la velocità all’istante $x_0 = 2\text{ s}$, con la formula

$$V_m = \frac{s(x) - s(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

dando alla x valori sempre più prossimi al 2.

x	V_m
3	5
2,5	4,5
2,2	4,2
2,01	4,01
2,0000001	4,0000001
1	3
1,5	3,5
1,8	3,8
1,9	3,9
1,99	3,99
1,9999999	3,9999999

Che ne dite di affermare che la velocità dell’automobile all’istante $x_0 = 2\text{ s}$ è 4 m/s ?

Ritorniamo alla:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

non $\exists f(2)$, però a 2 possiamo “avvicinarci” tanto quanto vogliamo sia da “sinistra” cioè dando alla x valori prima di 2 $x = 1$; $x = 1,5$;...; $x = 1,9999999$ sia da “destra” ... $x = 3$; $x = 2,5$;...; $x = 2,0000001$. Dunque abbiamo la tabella di pagina seguente:

x	$f(x)$
3	5
2,5	4,5
2,2	4,2
2,01	4,01
2,0000001	4,0000001
1	3
1,5	3,5
1,8	3,8
1,9	3,9
1,99	3,99
1,9999999	3,9999999

Possiamo senz'altro affermare, almeno intuitivamente, che $f(x)$ si “avvicina” sempre più a 4 man mano che la x si “avvicina” sempre più a 2 .

Questa circostanza si esprime in matematica con la notazione:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4 \quad (2)$$

da leggersi:

“limite per x tendente a 2 di $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$ uguale a 4”

e si dice che 4 è il limite per x tendente a 2 di $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Osserviamo ora i seguenti fatti:

- a. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ $f(2) \text{ non } \exists$;
- b. $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4$ $g(2) = 4$;
- c. $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 4$ $h(2) = 6$;
- d. $\lim_{x \rightarrow 2} t(x) \text{ non } \exists$ $t(2) = 6$;
- e. a rigore, perché $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ sarebbe proprio 4 e non 4,0000000000000001 per esempio?
- f. “quanto” ci si deve avvicinare a 2 affinché sia 4 il $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$?
- g. che senso ha parlare di limite anche nel caso della h e t ?

Ma a rigore, cosa significa veramente la scrittura $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$, viste le a.,b.,c.,d.,e.,f.,ecc.,ecc.,?

Per queste ragioni ma non solo, nasce l'esigenza di dare una definizione rigorosa di limite!!!

Un primo approccio rigoroso

Partiamo dalla “scrittura” $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$, ed incominciamo con l’osservare che l’affermazione:

$\frac{x^2 - 4}{x - 2}$ si “avvicina” sempre più a 4 man mano che la x si “avvicina” sempre più a 2 ;

equivale alla seguente:

la quantità $\frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4$, in valore assoluto, cioè la quantità $\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right|$ si “avvicina” sempre più a 0 man mano che la x si “avvicina” sempre più a 2 o ciò che è lo stesso,

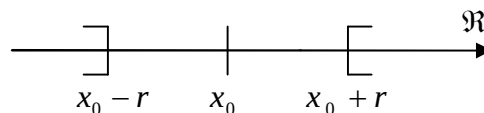
la quantità $\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right|$ si mantiene minore di un qualunque numero positivo ε , a patto di prendere la x “sufficientemente vicina” a 2 .

Richiamiamo ora alcune nozioni di **topologia della retta**.

Nozione di Intorno Sferico

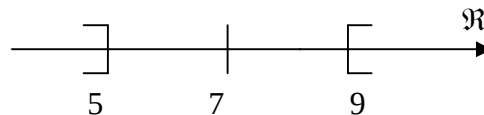
Siano $\mathbb{R}$ l’insieme dei numeri reali, $x_0 \in \mathbb{R}$; $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Si chiama intorno sferico di centro x_0 e raggio r l’insieme:

$$I(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} \text{ o anche } I(x_0, r) =]x_0 - r, x_0 + r[.$$



Per esempio se $x_0 = 7$ e $r = 2$ si ha:

$$I(7, 2) = \{x \in \mathbb{R} : |x - 7| < 2\} \text{ ossia } I(7, 2) =]7 - 2, 7 + 2[=]5, 9[;$$



In altri termini, $]5, 9[$ è l’insieme di tutti i numeri reali compresi tra 5 e 9 tranne 5 e 9.

Si osservi inoltre che:

$$|x - 7| < 2 \Leftrightarrow x \in]7 - 2, 7 + 2[\text{ ossia } |x - 7| < 2 \Leftrightarrow x \in]5, 9[\Leftrightarrow 5 < x < 9;$$

più ingenerale:

$$|x - x_0| < r \Leftrightarrow x \in]x_0 - r, x_0 + r[\Leftrightarrow x_0 - r < x < x_0 + r;$$

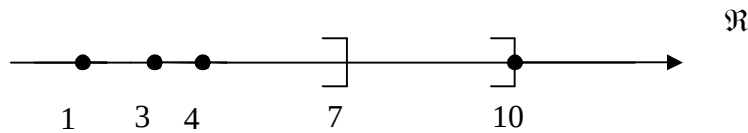
in altri termini, dire che $|x - x_0| < r$ o dire che $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$ o dire che $x_0 - r < x < x_0 + r$ è la stessa cosa.

Nozione di Punto di Accumulazione

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$; diciamo che x_0 è un **punto di accumulazione** per A , se comunque prendiamo un intorno di x_0 , esiste almeno un punto diverso da x_0 che appartiene sia a questo intorno sia ad A . In simboli: $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap A - \{x_0\} \neq \emptyset$. Si noti che un punto può essere di accumulazione pur non appartenendo ad A , e di contro, pur appartenendo all'insieme può non essere di accumulazione, evidentemente può appartenere ed essere di acc. e può non appartenere e non essere di acc.. Riassumendo in simboli abbiamo:

$$x_0 \text{ è di accumulazione per } A \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \text{ si ha }]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap A - \{x_0\} \neq \emptyset.$$

Il seguente esempio aiuta a capire meglio: $A = \{1, 3, 4\} \cup]7, 10]$
graficamente



1, 3, 4 $\in A$ ma non sono di accumulazione, 7 $\notin A$ ma è di accumulazione, tutti gli $x \in]7, 10]$ appartengono ad A e sono di accumulazione.

Definizione rigorosa

Definizione - Siano $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale di una variabile reale ($A \subseteq \mathbb{R}$), $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per A , L un numero reale; diciamo che la funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ **converge** al numero reale L (o anche che **ammette limite** L) per x tendente ad x_0 in A e scriviamo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L,$$

da leggersi “limite per x tendente ad x_0 di effe di x uguale ad L ”, se accade quanto segue:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \quad (1);$$

cerchiamo di capirne di più “traducendo” la (1):

$\forall \varepsilon > 0$ sostanzialmente significa “comunque prendiamo un intorno di L ” ossia $]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$;

$\exists \delta > 0$ significa “esiste un intorno di x_0 ” ossia $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$;

: significa “tale che”;

$\forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta$ significa “per ogni x appartenente ad A , $x \neq x_0$, $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$;

$\Rightarrow$ significa “si ha”;

$|f(x) - L| < \varepsilon$ significa “ $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ ”.

Pertanto la (1) “suona” così:

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste come conseguenza un $\delta > 0$, tale che, per ogni x appartenente ad A , $x - x_0$ in valore assoluto compreso tra zero e δ , si ha $f(x) - L$ in valore assoluto minore di ε .
Osservazione:

E' bene notare che si può presentare una delle seguenti eventualità: $x_0 \in A$ aut $x_0 \notin A$,
 ossia $\exists f(x_0)$ aut non esiste $f(x_0)$; ai fini del limite per x tendente ad x_0 , il presentarsi dell'una o dell'altra eventualità non comporta alcuna differenza; inoltre se $\exists f(x_0)$ e se esiste il $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, non è detto che sia $f(x_0) = L$, anzi in generale risulta $f(x_0) \neq L$, ancora può benissimo accadere che esista il $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ e non $f(x_0)$ o viceversa, vedasi figure 1 - 2 - 3 - 4 di pag. 2 e pag. 3, dove in tutti i quattro casi la (1) rende "giustizia". Dunque con questa definizione rigorosa, tutte le perplessità esposte a fine pagina 5, trovano risposta e non solo quelle.

In altri termini, la (1), può anche esprimersi così:

$$\forall V(L) \exists U(x_0): \forall x \in U(x_0) \cap A - \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V(L) \quad (2)$$

Cerchiamo di "tradurre":

$\forall V(L)$ significa "comunque prendiamo un intorno $V(L)$ di L ";

$\exists U(x_0)$ significa "esiste un intorno $U(x_0)$ di x_0 ";

: significa "tale che"

$\forall x \in U(x_0) \cap A - \{x_0\}$ significa "per ogni x appartenente sia ad $A - \{x_0\}$ che all'intorno $U(x_0)$ ";

$\Rightarrow$ significa "si ha";

$f(x) \in V(L)$ significa " $f(x)$ appartiene a $V(L)$ ".

Pertanto la (2) "suona" così:

Comunque prendiamo un intorno $V(L)$ di L , esiste come conseguenza un intorno $U(x_0)$ di x_0 , tale che, per ogni x appartenente sia ad $A - \{x_0\}$ che a quest'intorno $U(x_0)$, segue che $f(x)$ appartiene a $V(L)$.

Osserviamo che la (2) viene conosciuta in letteratura come la "**definizione unificatrice**" di limite, in quanto, in essa si prescinde dall'essere $x_0 \in \mathfrak{R}$ e $L \in \mathfrak{R}$, mentre la (1) va adattata di volta in volta a seconda che $x_0 \in \mathfrak{R}$ e $L \in \mathfrak{R}$; $\overline{x_0} \in \mathfrak{R}$ e $L \in \mathfrak{R}$; ... ecc., ecc.. Tuttavia entrambi risultano a dir poco interessanti oltre che "suggestive" ed "eleganti".

Riprendiamo ora la $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, dire che $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$, significa quindi:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in A, 0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \varepsilon \quad (3).$$

Risolviamo la: $\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \varepsilon$; essendo nel nostro caso $x \neq 2$ in quanto $0 < |x - 2|$, si ha:

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2$$

Quindi la disequazione $\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \varepsilon$ è equivalente alla:

$$|x + 2 - 4| < \varepsilon \Rightarrow |x - 2| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < x - 2 < \varepsilon \Rightarrow 2 - \varepsilon < x < 2 + \varepsilon;$$

cioè le soluzioni della $\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \varepsilon$ sono $2 - \varepsilon < x < 2 + \varepsilon$, quindi scegliendo come δ proprio ε

si ha: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \varepsilon : \forall x \in A, 0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \varepsilon$, cioè per ogni scelta di $\varepsilon > 0$ si

riesce a trovare comunque un intorno di 2, tale che la quantità $\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right|$ si mantenga minore di questo ε , a patto di prendere la x in questo intorno di 2 e ovviamente (in questo caso) $x \neq 2$.

Tanto per capire meglio come funziona “la cosa” diamo ad ε qualche valore e facciamo i conti:

per $\varepsilon = 0,1$ si ha $\delta = \varepsilon = 0,1$ e siamo sicuri che

$$\forall x \in A, x \neq 2, 2 - 0,1 < x < 2 + 0,1 \text{ ossia } 1,9 < x < 2,1 \Rightarrow \left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < 0,1$$

facciamo qualche prova, per esempio vediamo cosa succede per $x = 1,99$

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| = \left| \frac{1,99^2 - 4}{1,99 - 2} - 4 \right| = \left| \frac{-0,0399}{-0,01} - 4 \right| = |3,99 - 4| = |-0,01| = 0,01 \text{ appunto min ore di } 0,1$$

proviamo ora per $x = 2,09$

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| = \left| \frac{2,09^2 - 4}{2,09 - 2} - 4 \right| = \left| \frac{0,3681}{0,09} - 4 \right| = |4,09 - 4| = |0,09| = 0,09 < 0,1.$$

Ancora per $\varepsilon = 0,0001$ si ha $\delta = \varepsilon = 0,0001$ dunque:

$$\forall x \in A, x \neq 2, 2 - 0,0001 < x < 2 + 0,0001 \text{ ossia } 1,9999 < x < 2,0001 \Rightarrow \left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < 0,0001$$

per $x = 1,99993$ si ha: $\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| = \left| \frac{1,99993^2 - 4}{1,99993 - 2} - 4 \right| = \dots = |-0,00007| = 0,00007 < 0,0001.$

La definizione rigorosa di limite, può essere data anche seguendo un'altra strada, altrettanto valida, questa definizione fa uso della nozione di **funzione continua**. Alcuni autori preferiscono introdurre

la nozione di funzione continua, utilizzando la definizione di limite testè data, lo scrivente preferisce introdurre questa nozione indipendentemente dalla definizione di limite.

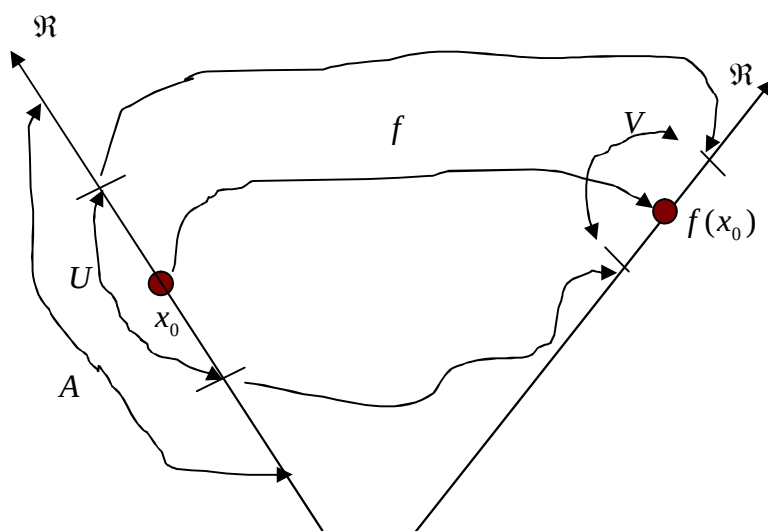
Funzioni continue ⁽¹⁾

Per esprimere in maniera intuitiva che un'applicazione $f : A \rightarrow \mathfrak{R}$ ($A \subseteq \mathfrak{R}$), è **continua nel punto** $x_0 \in A$, diciamo che $f(x)$ è arbitrariamente “vicino” a $f(x_0)$ a patto di prendere x sufficientemente “vicino” a x_0 .

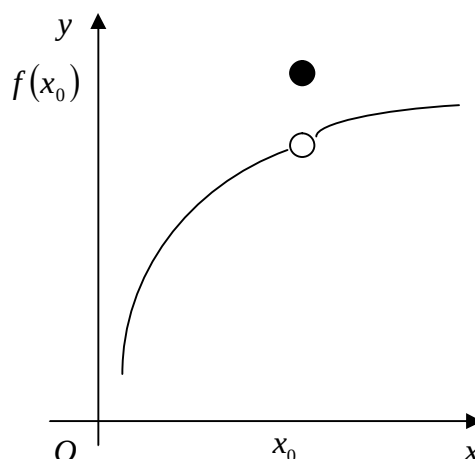
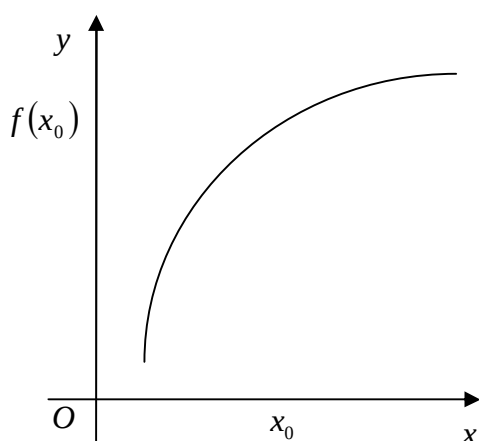
Ammettendo che la nozione matematica di “intorno” corrisponde alla nozione intuitiva di “vicinanza”, siamo allora condotti alla seguente:

Definizione - Sia $f : A \rightarrow \mathfrak{R}$ un'applicazione ($A \subseteq \mathfrak{R}$) e $x_0 \in A$.

L'applicazione f si dice continua nel punto x_0 , se, per ogni intorno V di $f(x_0)$ in $\mathfrak{R}$, esiste un intorno U di x_0 in A tale che $f(U) \subseteq V$. In simboli: $\forall V(f(x_0)) \exists U(x_0) : f(U) \subseteq V$



In termini di “ ε e δ ” si ha: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.



Il grafico di sinistra è quello di una funzione continua in x_0 quello di destra di una funzione non continua in x_0 .

- ⁽¹⁾ Mi riservo, di rendere quanto prima, in una sezione dedicata alla **continuità**, il più possibile “commestibile” questa importantissima nozione, analogamente a quanto fatto (si spera) nelle pagine precedenti per la nozione di limite.

Altra definizione rigorosa di limite

Definizione - Siano $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale di una variabile reale ($A \subseteq \mathbb{R}$), $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per A , L un numero reale; diciamo che la funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ **converge** al numero reale L (o anche che **ammette limite** L) per x tendente ad x_0 in A e scriviamo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L,$$

da leggersi “limite per x tendente ad x_0 di effe di x uguale ad L ”, se la funzione

$$f^* : A \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

così definita:

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per } x \in A - \{x_0\} \\ L & \text{per } x = x_0 \end{cases}$$

risulta essere continua in x_0 .

Osservazione:

Da questa definizione scaturiscono subito le seguenti considerazioni:

Si può presentare una delle seguenti eventualità: $x_0 \in A$ aut $x_0 \notin A$, ossia $\exists f(x_0)$ aut non esiste $f(x_0)$; ai fini del limite per x tendente ad x_0 , il presentarsi dell’una o dell’altra eventualità non comporta alcuna differenza; inoltre se $\exists f(x_0)$ e se esiste il $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, non è detto che sia $f(x_0) = L$, anzi in generale risulta $f(x_0) \neq L$, ancora può benissimo accadere che esista il $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ e non $f(x_0)$ o viceversa.

Teorema - Siano $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale di una variabile reale ($A \subseteq \mathbb{R}$), $x_0 \in A$ un punto di accumulazione per A ; condizione necessaria e sufficiente affinché $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ sia continua in x_0 è che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Osservazione:

Pertanto la nozione di limite per x tendente ad x_0 , da qualche informazione utile quando la funzione non è continua in x_0 oppure quando non è definita in tale punto.

Teorema - Siano $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale di una variabile reale ($A \subseteq \mathbb{R}$), $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per A ; condizione necessaria e sufficiente affinché $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ converga ad un numero reale L , ai sensi di quest'ultima definizione, per x tendente ad x_0 in A , è che:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon .$$

Dim.: ovvia a partire dalla definizione di funzione continua in un punto.

Osservazione:

Da quest'ultimo teorema si evince la perfetta equivalenza delle due definizioni.

I grafici seguenti dovrebbero aiutarci:

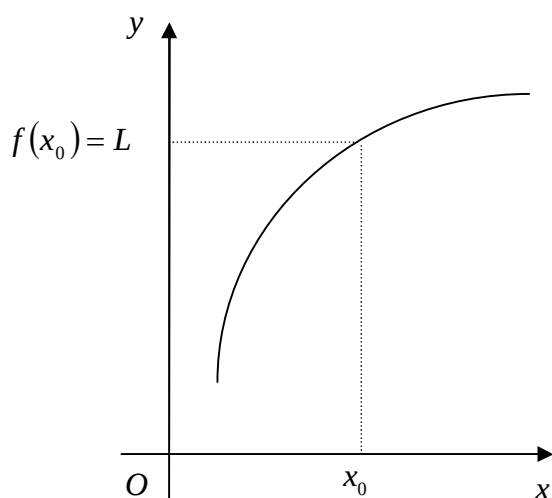


Figura 5

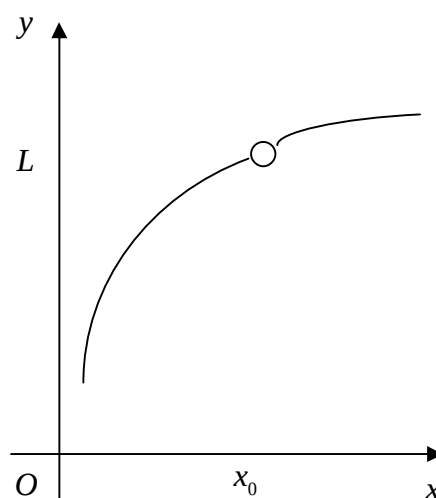


Figura 6

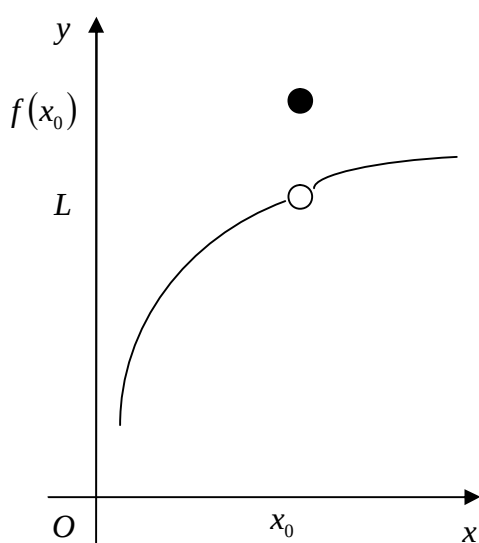


Figura 7

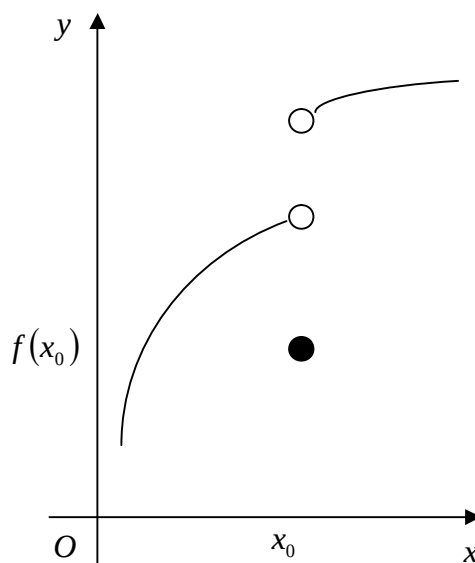


Figura 8

Nella figura 5 abbiamo il grafico di una funzione continua in x_0 e pertanto $L = f(x_0)$;

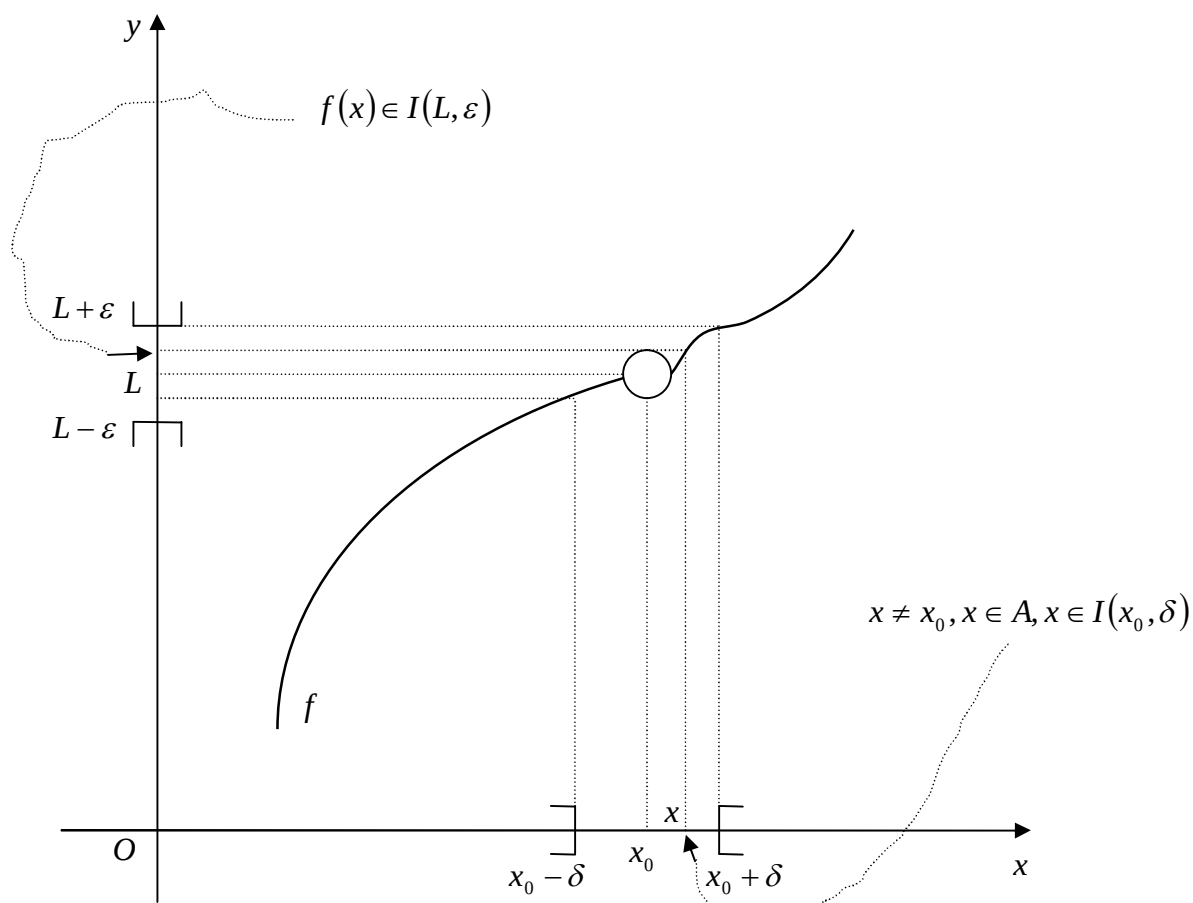
nella figura 6 abbiamo il grafico di una funzione non definita in x_0 che ammette limite L ;

nella figura 7 abbiamo il grafico di una funzione non continua in x_0 con $L \neq f(x_0)$;

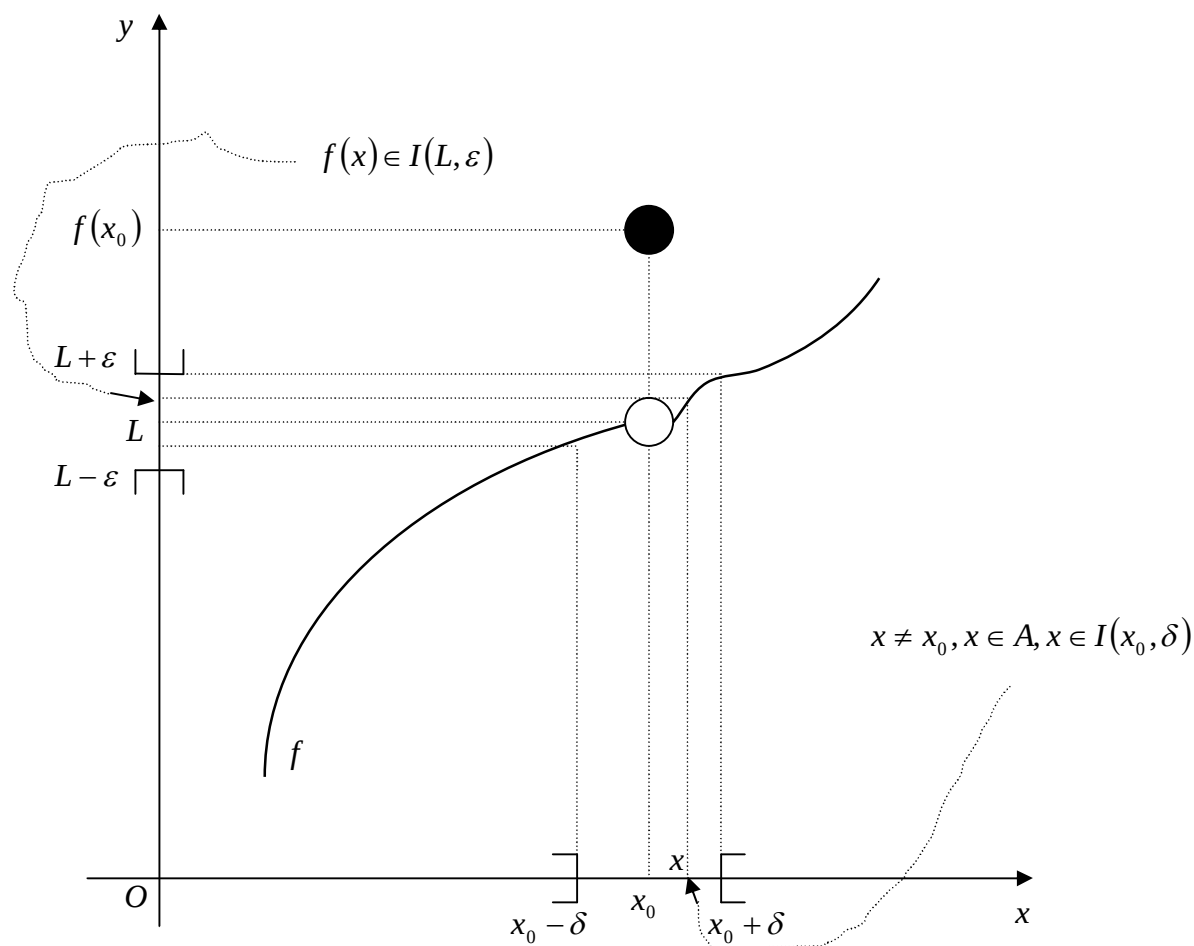
nella figura 8 abbiamo il grafico di una funzione non continua in x_0 per la quale $\text{non } \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Cerchiamo ora di analizzare il seguente grafico alla luce della:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \quad (1)$$

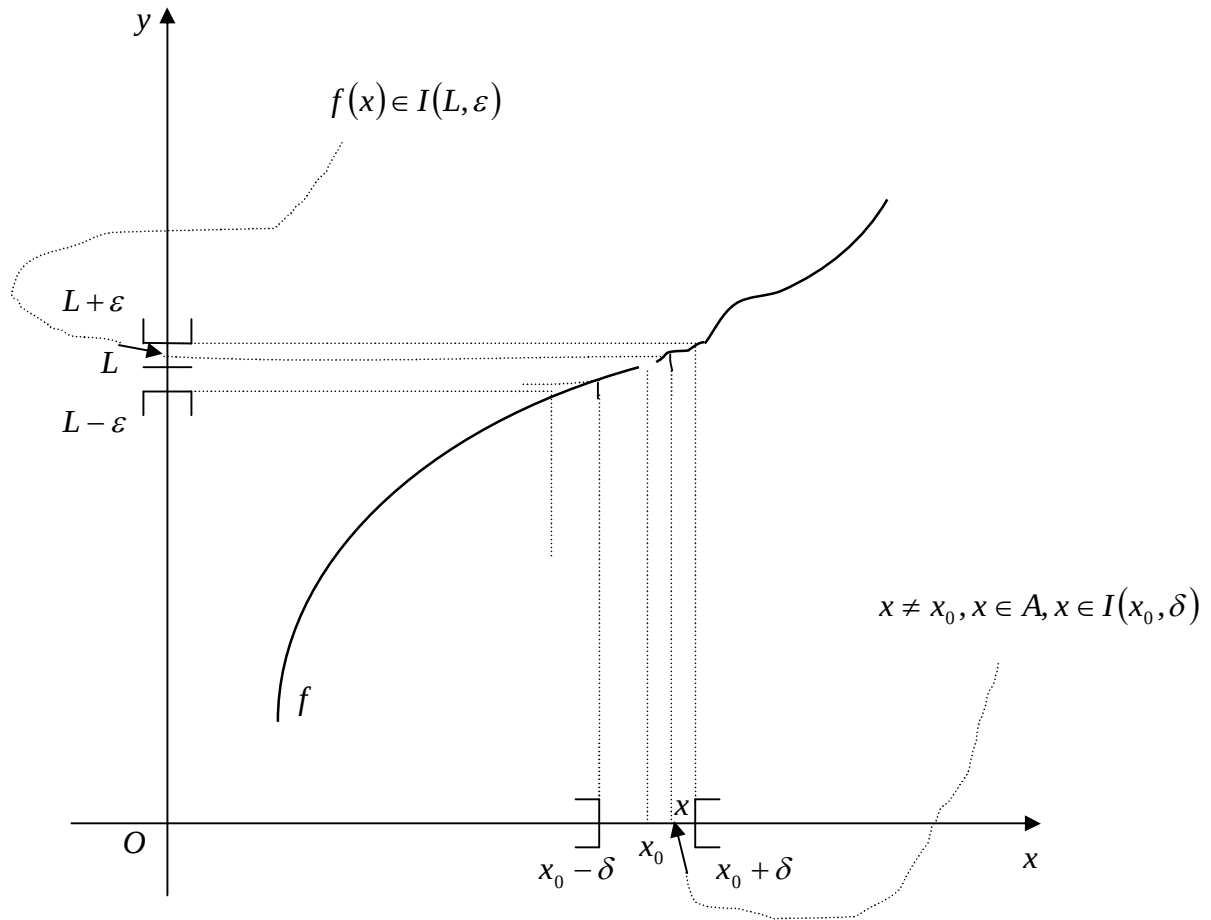


Nel seguente grafico la funzione è definita in x_0 e si ha $L \neq f(x_0)$



Osserviamo che nella situazione di figura 5 non cambia nulla rispetto ai due grafici precedente, mentre nella situazione di figura 8 **non è possibile trovare un** L , per il quale si abbia che, per ogni $\varepsilon > 0$ esista un $\delta > 0$

Dal grafico seguente si evince che scegliendo un ε più piccolo, il δ sarà un altro (più piccolo di prima) ma “tutto funziona” ancora:



Inesorabilmente $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$