

LA MATEMATICA NELLA VITA

E

LA VITA NELLA MATEMATICA

DI GIARDINA ANTONINO

Prefazione

La matematica ha sempre svolto un ruolo fondamentale nello sviluppo della civiltà, fornendo strumenti essenziali per comprendere e trasformare il mondo. Fin dall'infanzia ho coltivato una profonda passione per questa disciplina, che ho approfondito durante tutto il percorso scolastico.

Questo lavoro, realizzato con le conoscenze acquisite tra il primo anno della scuola superiore e il conseguimento del diploma, rappresenta un percorso personale volto a esplorare l'importanza della matematica nella storia dell'uomo e nella formazione del pensiero scientifico.

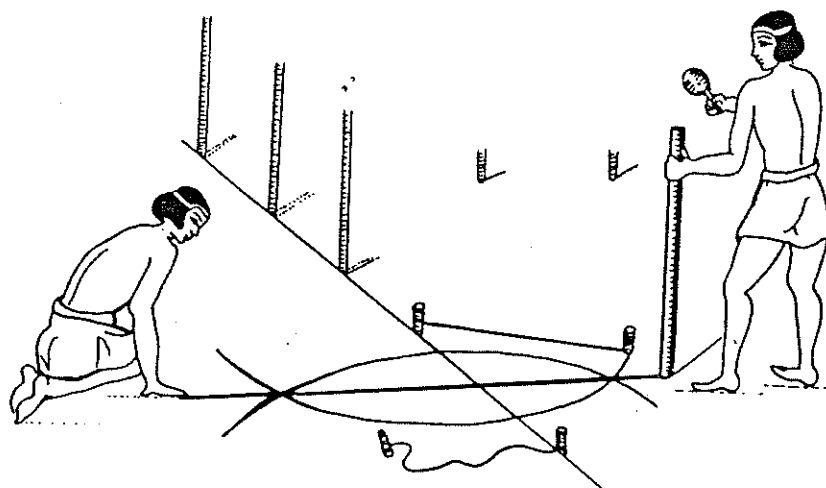
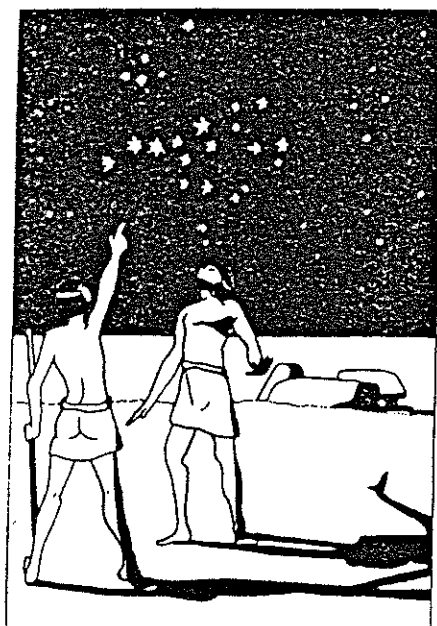
Il percorso si apre con una riflessione sull'importanza della matematica e sul contributo delle conoscenze numeriche e geometriche allo sviluppo delle antiche civiltà. Si prosegue con una piccolissima (direi infinitesima), introduzione storica all'analisi matematica, approfondendo il calcolo integrale e le equazioni differenziali (con semplici applicazioni all'elettrotecnica), fino ad arrivare all'uso del computer (in particolare il Commodore 128) per la risoluzione numerica di integrali e sistemi differenziali, tramite programmi in linguaggio BASIC.

LA MATEMATICA NELLA VITA

E

LA VITA NELLA MATEMATICA

DI: GIARDINA ANTONINO



INDICE

Introduzione	pag. I
Importanza della matematica	pag. 1
Come le conoscenze matematiche hanno contribuito	
Allo sviluppo degli antichi uomini	pag. 5
• Numeri e numerazioni • Tempo, tacche e numeri (Egiziano - Babilonese - Latino antico - Maya) • Abaco, zero e sistemi di numerazione	
Come le conoscenze geometriche hanno contribuito	
Allo sviluppo delle antiche civiltà	pag. 22
• La geometria nell'Antico Egitto • Piramidi - Dove e come nacque la geometria? • Squadra e triangoli • Quadrato e cerchio • La misura dell'estensione dei campi	
Introduzione storica dell'analisi	pag. 32
Calcolo Integrale	pag. 34
• Matematico e Esattore • Matematico ed Agrimensore • Integrali definiti • Integrali definiti • Applicazioni matematiche degli integrali definiti	
Equazioni differenziali	pag. 65
• Eq. Dif. Del I ordine in forma normale • Eq. Dif. A variabili separate e a variabili separabili • Eq. lineari del II ordine a coefficienti costanti e omogenee	
Alcune applicazioni di equazioni differenziali all'elettrotecnica	pag. 88
Integrali su Personal Computer (Programmi in Basic su Commodore 128)	pag. 92
• Metodi di Cotes (Metodo dei trapezi - Metodo di Simpson - Metodo di Villarceau) • Metodo di Romberg	
Equazioni differenziali su Personal Computer (Programmi in Basic su Commodore 128) ..	pag. 106
• Metodo di Runge - Kutta • Metodo Predittore - Correttore	

INTRODUZIONE

Nella prima parte di questa modesta trattazione ho riportato una breve e semplice storia delle origini della matematica ed ho messo in evidenza l'enorme contributo che questa scienza ha offerto al progresso della civiltà, sin dai tempi più antichi.

Contemporaneamente tratto delle prime nozioni di aritmetica e geometria che costituiscono il punto di partenza per lo svolgersi di questa scienza.

Nella parte successiva ho riportato una breve introduzione storica sull'analisi matematica seguita da un breve panorama storico sulle teorie ad essa applicate (da Eudosso di Cnido a Sierpinski).

In seguito mi sono soffermato sullo studio degli integrali e delle equazioni differenziali del primo e del secondo ordine, con alcune applicazioni matematiche

II

che e non su di essi.

Infine ho scritto dei programmi su personal computer (Commodore 128) con breve commento, relativi agli integrali e alle equazioni differenziali.

IMPORTANZA DELLA MATEMATICA

Un grande scienziato italiano, Galileo Galilei (nato nel 1564 e morto nel 1649), soleva dire che "lo Universo, questo grandissimo libro della natura che ci aperto dinanzi, é scritto in lingua matematica ed i caratteri sono: triangoli, cerchi ed altre figure geometriche" .

Già molti secoli prima Pitagora un celebre filosofo e matematico greco del VI secolo A.C. (personaggio realmente esistito anche se purtroppo le sue origini si perdono nelle legende in pratica si tratta di un personaggio semilegendario; comunque una cosa é certa, e cioè che nella sua casa non esistevano barzellette).

Vissuto a lungo a Crotone nel VI secolo aveva affermato che il principio di tutte le cose é da cercarsi nei numeri.

Per convincersi della verità di questa affermazione, basta osservare attentamente e con passione gli innumerevoli oggetti che ci circondano; tutte le cose, (chi più e chi meno) dalle più semplici alle più complesse, parlano un linguaggio quasi sempre matematico.

Strade, ponti, costruzioni di ogni genere, mezzi di trasporto, dall'umile carro degli antichi uomini alla moderna automobile, portano i segni di quella meravigliosa costruzione dell'uomo che é la matematica.

Non é difficile scoprire strutture geometriche nelle sinuose ed aerodinamiche linee dei moderni reattori, nelle fantastiche traiettorie descritte dai satelliti artificiali nello spazio, nelle ardite costruzioni moderne, nei tracciati delle autostrade, nelle decorazioni architettoniche di chiese e monumenti.

Così come non é difficile capire l'enorme importanza dei numeri e delle strutture numeriche, che sono alla base di tutte le costruzioni scientifiche dello uomo; basti pensare alle moderne calcolatrici elettroniche ed ai modernissimi calcolatori (i computer) che in millesimi di secondo eseguono calcoli complicatissimi.

Con l'aiuto di semplici strumenti geometrici é stato possibile risolvere rapidamente problemi di agrimensura, di ingegneria e di astronomia e costruire apparecchi e meccanismi che rendono sempre più agiata e confortevole la vita degl'uomo; per il momento sul proprio pianeta in seguito può darsi su altri.

La geometria come l'aritmetica, appaiono perciò strettamente connessi con i problemi della vita reale, così ora, nell'epoca dell'energia atomica, delle cal-

colatrici elettroniche e dei cosiddetti cervelli elettronici, come nell'antichità, quando gli uomini, per risolvere i problemi della loro vita quotidiana, andarono scoprendo a mano a mano le prime strutture numeriche e geometriche.

COME LE CONOSCENZE ARITMETICHE HANNO CONTRIBUITO ALLO
SVILUPPO DEGLI ANTICHI UOMINI

NUMERI E NUMERAZIONE

TEMPO, TACCHE E NUMERI Quando e come furono inventati ?

Gli uomini primitivi non avevano né città né grossi villaggi e per procurarsi il cibo si spostavano continuamente da un posto all'altro, per cercare frutti radici, cereali, animali da cacciare.

La vita era allora estremamente semplice e gli uomini possedevano pochissime cose: pelli di animali per ripararsi dal freddo, poche armi per la caccia, rudimentali recipienti per l'acqua.

Talvolta penso era necessario scambiarsi qualcuno di tali oggetti e nella contrattazione nacquero i primi numeri: "Io ti dò una pelle di orso e tu mi dai due punte di lancia".

E tutto il discorso veniva fatto con le mani: un dito significava una cosa, due dita due cose, ecc..... Questa era tutta l'aritmetica di allora; già quattro o cinque oggetti costituivano per loro un mucchio di oggetti.

Nella ricerca del cibo spesso gli uomini erano costretti a spostarsi da una regione ad un'altra; ed essi si accorsero ben presto che i frutti degli alberi non sempre erano maturi e buoni da mangiare.

Gli uomini più saggi scoprirono così che era molto importante sapersi orientare e conoscere l'andamento delle stagioni.

Certamente il sole ed alcune costellazioni di stelle lo aiutarono a orientarsi durante i suoi continui spostamenti.

Il sole fu anche il primo "orologio" dell'uomo e

l'osservazione delle ombre prodotte dagli oggetti colpiti dai raggi solari (possiamo paragonarli alle lancette di un moderno orologio) permise di stabilire l'orario della giornata con una certa approssimazione.

Per misurare periodi di tempo più lunghi si ricorse alla luna; i nostri progenitori si accorsero che le varie fasi lunari si svolgevano con regolarità. Per determinare il periodo ricorsero a un sistema molto semplice: ad ogni sorgere del sole incidevano una tacca su un fusto di un albero; una tacca, un giorno, due tacche, due giorni, e così via.

Stabilirono in tal modo che l'alternarsi delle fasi lunari richiedeva grosso modo una trentina di giorni e che occorreivano dodici di tali periodi per passare da una primavera all'altra. Dopo un certo tempo, gli uomini furono così in grado di prevedere il tempo giusto

per la maturazione dei frutti, per la caccia, per l'arrivo del freddo e della buona stagione. Da questo primo rozzo (ma importante per i tempi di allora) calendario sorse, dunque, la necessità di scrivere i numeri.

La più antica scrittura di numeri conosciuta risale a circa cinquemila anni fa e proviene dalla Mesopotamia. I numeri venivano scritti su tavolette di argilla e sul papiro e i loro simboli, per i numeri più piccoli ricordano la forma delle tacche.

(Vedere la figura relativa)

EGIZIANO

I	II	III	IIII	III	III	IIII	IIII	III
1	2	3	4	II	III	III	IIII	III
				5	6	7	8	III
								9



10



100



1000

BABILONESE

Y	YY	YYY	YYYY
1	2	3	4

fino al numero nove é analogo a quello egiziano dopo

diventa: $\begin{matrix} & Y \\ \swarrow & 60 \\ 10 & \end{matrix}$

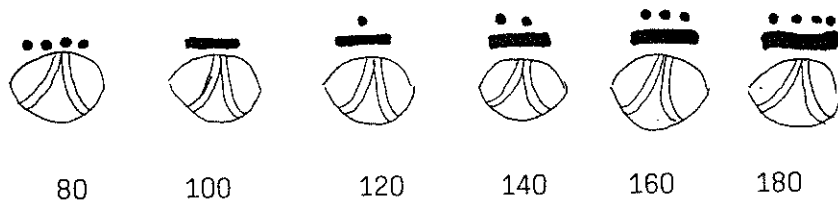
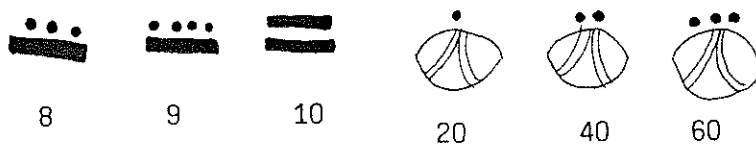
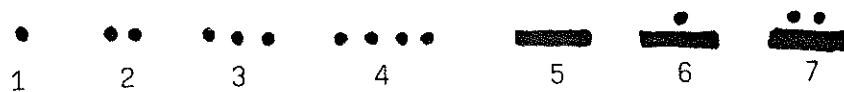
LATINO ANTICO

I	II	III	IIII	V	VI	VII	VIII	VIIII	X	L	C
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	50	100

Più tardi i Romani usarono anch'essi delle linee per indicare i primi numeri, ma per i numeri successivi fecero ricorso alle lettere dell'alfabeto (fig. pagina 9)

Uno dei più importanti sistemi di numerazione dell'antichità é certamente quello usato dai Maya della America centrale. Essi scrivevano i numeri servendosi solo di tre simboli: un punto una linea e un ovale sotto ogni numero, questo risultava moltiplicato per venti; così il simbolo  significava sessanta. (fig. pagina 11)

M A Y A



ABACO, ZERO E SISTEMI DI NUMERAZIONE

E' assurdo pensare che il progresso sulla strada dei numeri sia stata facile e rapido

Nei primi tempi l'uomo ebbe a che fare con numeri piuttosto piccoli e poté rappresentarli con una certa semplicità. Ma col passare del tempo e con lo svilupparsi del commercio si presentò la necessità di scrivere numeri più grandi e, soprattutto, la necessità di fare calcoli.

Gli antichi sistemi di numerazione si basavano sull'uso di un simbolo diverso per ogni numero o sulla ripetizione di uno stesso simbolo.

I Romani ricorsero, per alcuni numeri, alle lettere dell'alfabeto

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Una lettera scritta a sinistra sottrae delle
unità, scritta a destra le aggiunge: $IL = 50 - 1 = 49$

$VII = 5 + 1 + 1 = 7$

Ma anche i romani non risolsero il problema di scrivere
rapidamente i numeri; pensate che per scrivere numeri
relativamente piccoli occupavano tre o quattro righe
della loro tavolozza d'argilla.

le operazioni, poi erano per loro complicatissi-
me e in esse si cimentavano solo i grandi matematici.
Quasi contemporaneamente alla civiltà romana, circa due-
mila anni fa, la popolazione dell'India scrivevano i nu-
meri due e tre con lineette orizzontali (vedi figura)



fig. 1



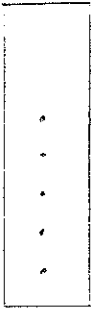
fig. 2

Quindi si vede facilmente come, a poco a poco, i simboli si modificarono com'è indicato nella fig. 2 fino ad arrivare ai nostri due e tre. Ma non fu certamente questo il merito principale degli indiani. Anch'essi, come gli egizi e i babilonesi, usavano un ingegnoso espediente per scrivere i numeri e per fare i calcoli: tracciavano alcuni solchi paralleli suola sabbia o sulle tavolozze ed in essi ponevano dei sassolini e, successivamente, delle palline.

Ogni sassolino nel primo solco, partendo da destra, indicava le unità, quelli del secondo le decine, quelli del terzo le centinaia, e così via. E' stato questo il primo rudimentale abaco

Nell'abaco, dunque, un sassolino di un solco ha un valore uguale a dieci volte quello di un sassolino posto nel solco immediatamente precedente.

Ciò vuol dire che il sistema di numerazione ha
per base il numero dieci.

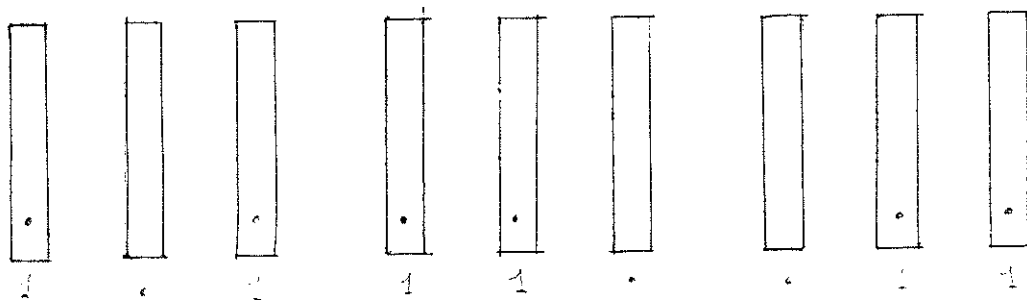
			
migliaia	centinaia	decine	unità
10^3	10^2	10^1	10^0
5	2	3	2

Questo é il numero rappresentato nell'abaco qui sopra

Antichi sistemi di numerazione sono quello quinario (base cinque), sorto dalla possibilità di contare a cinque mediante l'uso delle dita di una mano; quello vigesimale (base venti), di cui rimane traccia nel " quatre-vingts " dei francesi per indicare ottanta, cioè quattro ventine; quello duodecimale (base dodici di cui rimane traccia nell'uso delle dozzine, cioè dodici unità; quello sessagesimale (base sessanta, in uso presso gli antichi babilonesi di cui rimane traccia nella divisione dell'ora in sessanta minuti e del minuto in sessanta secondi. Ma ritornando agli indiani possiamo dire che essi usavano il sistema di numerazione a base dieci, nato certamente dalle possibilità di contare a decine, usando le dita delle due mani.

Ebbene, l'abaco suggerì agli indiani una delle più grandi scoperte della storia dei numeri.

Ponendo due palline in due colonne dell'abaco, si poteva ottenere il numero undici, oppure centouno, oppure centodieci, ecc. Nella trascrizione di numeri come indicare il valore corrispondente alle colonne vuote? Per indicare tali colonne gli indiani pensarono di usare un puntino così come noi oggi usiamo lo zero.



Nacque così lo zero e la sua scoperta, come si può intuire facilmente, costituì una vera rivoluzione nell'arte della numerazione e dei calcoli.

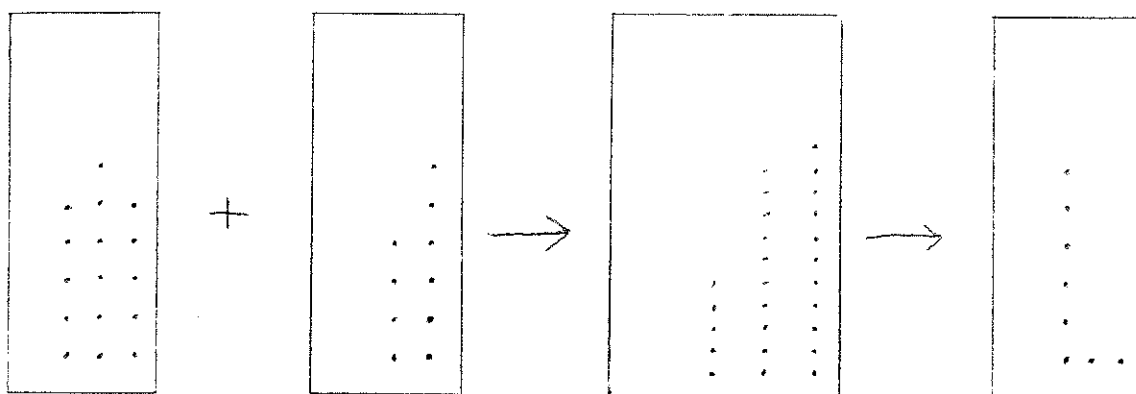
fu così possibile scrivere i numeri usando i dieci simboli o cifre del sistema di numerazione decimale;

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

ma fu soprattutto possibile eliminare tutte le difficoltà che si presentavano nelle epoche precedenti anche nei calcoli più semplici.

Il sistema di numerazione fu appreso dagli arabi nell'India (VII secolo d.c.) e dagli arabi si diffuse in Europa, soprattutto per merito del matematico italiano Leonardo Fibonacci, che nel 1202 scrisse il libro dell'abaco (in latino: liber abaci) nel quale spie-

ga genialmente il loro comodissimo sistema per scrivere i numeri e le sue applicazioni.



Nello schema precedente é stata effettuata con l'abaco l'operazione $565 + 46 = 611$

Per concludere possiamo dire che il sistema romano é additivo mentre il sistema di numerazione decimale é posizionale. Infatti se consideriamo il numero romano XXX, formato da tre simboli uguali, tutte le cifre indicano lo stesso valore, cioè dieci unità. Il numero considerato corrisponde perciò al nostro trenta: i romani tra due simboli sottintendevano il segno di addizione o sottrazione; se ora consideriamo il numero 44 del sistema di numerazione decimale, esso é formato da due cifre uguali, ma essi non hanno lo stesso valore: la cifra a destra indica 4 unità semplici, la cifra a sinistra indica 4 decine di unità ossia 40 unità semplici.

Il valore delle cifre, dunque, dipende dalla posizione che esse occupano, il sistema di numerazione decimale é perciò un sistema posizionale.

L'aritmetica nacque come la geometria, dai po-

poli antichi e per necessità della vita pratica, come
quelle di rappresentare e di calcolare con i numeri, di
determinare con una certa approssimazione l'arrivo del-
la buona stagione, e il tempo adatto per la caccia.

COME LE COSCENZE GEOMETRICHE HANNO CONTRIBUITO ALLO
SVILUPPO DELLE ANTICHE CIVILTÀ

LA GEOMETRIA NELL'ANTICO EGITTO

PIRAMIDI - Dove e come nacque la geometria ?

Nella parte orientale dell'Africa si estende un grande deserto ondulato, la cui estensione é all'incirca due volte quella dell'Italia: l'Egitto. Esso é percorso in tutta la sua lunghezza da un grandissimo fiume, il Nilo, che sbocca nel Mar mediterraneo. Lungo le rive e nella valle del fiume il deserto diventa terreno ubertoso ricco di vegetazione.

Propiziata dal benessere derivante dalla fertilità della striscia di terra adiacente al Nilo, fiorì in Egitto un'antichissima civiltà che permise di fare importanti progressi nel campo della scienza e delle arti.

A quei tempi l'Egitto era governato dalle dinastie dei Faraoni, i quali esercitavano il loro potere attraverso i sacerdoti, che ben presto divennero gli uomini più influenti del loro territorio.

Tra l'altro, furono i sacerdoti a dirigere la costruzione di grandi templi e delle piramidi che servivano come tombe per i faraoni.

La più grande delle piramidi, quella di Cheope, fu costruita tra il 3000 ed il 2500 a.C.; si presume che la sua costruzione abbia richiesto l'opera di circa centomila uomini per vent'anni! Le sue dimensioni sono enormi: circa 145 metri di altezza, mentre il lato della base, che è un quadrato, è di 233 metri circa.

Per erigere questi grandiosi monumenti, gli egiziani dovevano saper preparare e disegnare i progetti che in un primo tempo furono incisi su tavolette

di argilla ; dovevano conoscere il modo di spianare, levigare, squadrare blocchi di pietra, di trasportarli nella giusta posizione.

SQUADRA E TRIANGOLI

Un primo problema si presentò senza dubbio con la squadratura di quegli enormi blocchi di pietra. Per far ciò era necessaria una squadra, e per costruire una squadra gli Egiziani dovettero prima costruire un triangolo con due lati ad angolo retto.

Per misurare le lunghezze essi usavano una corda con dei nodi ad uguale distanza l'uno dall'altro o bene, in circostanze rimaste sconosciute, gli Egiziani scoprirono che nel triangolo avente per lati tre pezzi di corda, composti rispettivamente di 3,4,5, parti uguali di fronte al lato più lungo si trovava un angolo retto

e togliendo questo lato più lungo, ottennero la comune squadra usata dai muratori e dai falegnami.

QUADRATO E CERCHIO

Si sa certamente che le facce delle piramidi d'Egitto sono dei triangoli, mentre le basi, costituite da enormi blocchi di pietra, hanno la forma di un quadrato.

Nel costruire la base a forma perfettamente quadrata gli Egiziani posero ogni cura.

Ma come riuscirono a costruire un quadrato? Con la corda provvista di nodi essi potevano costruire sul terreno spianato un quadrilatero in modo che i lati fossero uguali, ma non sappiamo come essi ottennero che gli angoli fossero retti, come nel quadrato.

Forse si servivano della squadra o forse realizzarono il loro intento con l'aiuto di un'altra figura geometrica

che conoscevano da tempo: il cerchio.

Certamente essi sapevano disegnarne un cerchio, servendosi di una corda che aveva un estremo: fissato ad un palo conficcato nel terreno; facendo ruotare l'altro estremo provvisto di un pezzo di legno appuntito, in modo che la corda rimanesse sempre tesa durante la rotazione, essi tracciavano sul terreno una circonferenza, cioè la linea che limita il cerchio (la circonferenza è anche definita come il luogo geometrico dei punti del piano aventi da un punto fisso, il centro C, una distanza assegnata r detta raggio).

Si tratta ovviamente di un primo rudimentale compasso.

Gli Egiziani sapevano anche che il cerchio è tanto più grande quanto più grande è la corda, cioè il raggio del cerchio stesso ($A = \pi r^2$; $C = 2\pi r$).

Per costruire angoli retti sul terreno, il cerchio

venne utilizzato in maniera analoga a quella che utilizziamo noi oggi per disegnare angoli retti su un foglio da disegno.

Una volta raggiunto lo scopo di costruire gli angoli retti sul terreno era molto facile costruirvi il quadrato; e una volta costruito il quadrato sul terreno, esso veniva ricoperto con un primo strato di blocchi di pietra levigati e squadriati.

Per la sovrapposizione degli altri strati, i blocchi venivano trascinati su dei piani inclinati costituiti da mucchi di terra, con l'aiuto di rulli di legno che ne agevolavano la salita.

Il secondo strato era leggermente più piccolo del primo e veniva posto esattamente nel mezzo di questo; e così via, per gli strati successivi.

In tal modo le facce delle piramidi apparivano in un

primo tempo come enormi scalinate triangolari; successivamente gli incavi tra uno stato e l'altro venivano riempite con pietre più piccole e mattoni.

Per potere realizzare queste opere grandiose, gli architetti egiziani dovevano possedere numerose conoscenze pratiche (e molte altre ne acquistarono durante la realizzazione) nell'arte della misurazione, cioè nella geometria.

LA MISURA DELL'ESTENZIONE DEI CAMPI

Non bisogna però ritenere che le conoscenze geometriche degli antichi Egiziani fossero soltanto nella progettazione e nella costruzione dei templi e delle piramidi.

Fin dai primi tempi della vita di quel popolo si presentarono altri problemi, la necessità di risolverli portò alla scoperta di altre regole di geometria.

Ritornando al discorso relativo al fiume Nilo si é visto che quest'ultimo era l'unica fonte di benessere per l'Egitto; infatti, il resto del paese era terreno desertico.

Ogni anno, nel periodo che va da giugno a settembre, il Nilo supera gli argini ed inonda la vallata, depositando uno strato di fango (Limo) che fertilizza il terreno.

A quei tempi, se da un lato le periodiche inondazioni permettevano di produrre un ottimo raccolto, dall'altro procurava dei problemi complicati, perché le acque che invadevano la valle asportavano i confini posti tra un campo e l'altro.

Si rendeva perciò necessario misurare l'estensione dei campi, di modo che, dopo l'inondazione, i confini potessero essere rapidamente ripristinati.

La necessità di misurare l'estensione dei campi sorse

anche per un altro motivo: pare che i governanti dell'antico Egitto, i Faraoni, facessero pagare le tasse ai contadini e che queste fossero tanto più elevate quanto più grande era l'estensione dei campi.

Questi compiti di ripristinare i confini dei campi e di riscossione delle tasse venivano affidati il più delle volte ai sacerdoti, i quali fra l'altro dovevano conoscere il modo o i modi di trovare l'area dei campi.

Forse la prima figura di cui impararono a trovare l'area fu il rettangolo; i pavimenti di molti templi ed abitazioni erano di forma rettangolare e ricoperte di mattonelle quadrate; l'attenta osservazione di un pavimento del genere dovette indubbiamente portarli alla regola per trovare l'area del rettangolo ($A = b \cdot h$) - I sacerdoti egiziani scoprirono ben presto come calcolare l'area di un triangolo, osservando che esso era la metà di un rettango-

lo.

Naturalmente, non tutti i campi avevano forma rettangolare o triangolare; spesso essi si trovavano con la forma di un poligono qualunque.

Per trovare l'area i sacerdoti li suddividevano in triangoli e sommavano poi le singole aree degli stessi.

La geometria, quindi possiamo dire che nacque ed in un primo tempo si sviluppò in Egitto; da e per necessità della vita pratica, come quelle di erigere piccoli e grandi costruzioni o di misurare l'estensione dei terreni.

Più tardi, nell'antica Grecia, questo ramo della matematica cominciò a diventare vera e propria scienza ed a svincolarsi dalle questioni di carattere pratico.

Ma i Greci, memori dell'origine di questa scienza, la chiamarono geometria, da mitron che significa in greco misura dei terreni.

INTRODUZIONE STORICA DELL'ANALISI

L'analisi é una disciplina matematica che comprende parecchie teorie le cui principali sono:

- Il calcolo infinitesimale propriamente detto (calcolo differenziale ed integrale);
- la teoria delle funzioni e specialmente la teoria delle funzioni di una variabile reale;
- il calcolo delle variazioni, ecc.

Si tratta di una parte importante dell'edificio matematico, nata dalle scoperte di Fermat, Newton e Leibniz e con molteplici applicazioni alla fisica.

Segue nella pagina successiva un breve panorama storico di questo ramo della matematica (Analisi).

Eudossio di Cnido (408-355 a.C.)

Archimede

Dimostrazione per esaurimento (metodo di approssimazione all'infinito).

Utilizzazione del metodo per esaurimento per calcolare la superficie della parabola; determinazione delle tangenti alle spirali.

Viete (1540-1603)

Da l'espressione del prodotto infinito

$$\cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdot \dots \cdot \cos \frac{\pi}{2^n}$$

come uguale all'infinito, a $\frac{2}{\pi}$ (Varriorum de rebus mathematicis responsorum, 1593).

Keplero (1571-1630)

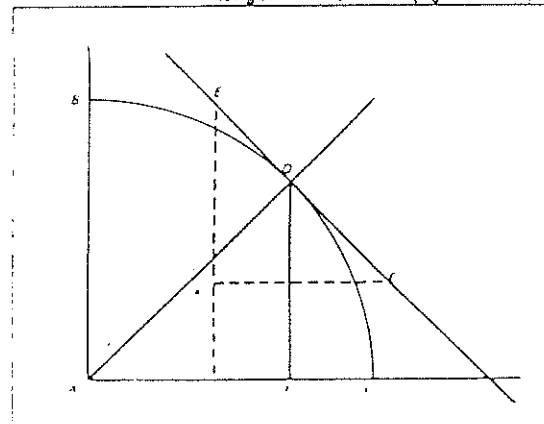
Nova stereometria solidorum vineariorum (1615): soluzioni approssimative di diversi problemi secondo il metodo di Archimede.

Cavalieri (1598-1647)

Geometria indivisibilibus continuorum quadam ratione promota (1635): determinazione di una superficie o di un volume mediante decomposizione della figura da misurare in elementi caratteristici indivisibili, tanto piccoli quanto si vuole, la cui somma, all'infinito, fornisce la superficie o il volume cercato.

Pascal (1623-1662)

Trattato dei seni del quarto di cerchio: per dimostrare un teorema particolare di trigonometria, Pascal è portato a considerare la similitudine dei due triangoli rettangoli AID e E'KE (figura sotto).



Fermat (1601-1665)



Fermat

Per trattare dei problemi di minimo e di massimo, Fermat suppone che la grandezza A che egli vuole calcolare e che è data da una equazione di forma $f(A) = 0$, può essere sostituita da $A + E$, essendo l'equazione $f(A + E) = 0$ una equazione valida. Questo si chiama uguagliare $f(A)$ e $f(A + E)$. Si calcola $f(A + E)$, si riducono i termini e, dopo aver posto, nell'ultimo risultato, $E = 0$, si ottiene l'espressione di A. Questo metodo — in linguaggio moderno — consiste perciò nel fare calcoli su $A + E$, E essendo una quantità infinitamente piccola cui si applicano le regole del calcolo ordinario e che si annulla in seguito. Fu ripresa da Barrow (1630-1677), il maestro di Newton.

Wallis (1616-1703)

Inaugura il calcolo delle serie infinite, con la dimostrazione della famosa formula di Wallis, nella Arithmetica Infinitorum (1655).

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2 \times 4 \times 6 \times 8 \dots \times (2n)}{3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n-1)} \right] \times \frac{1}{2n+1}$$

Inventore dei logaritmi (1614-1619).

Napier (o Neper 1550-1617)

Nicola Mercator (1620-1687)

Trattato sull'uso dei logaritmi (1668).

Newton (1642-1727)

Inventore del calcolo infinitesimale, che usa, soprattutto nei suoi famosi Philosophiæ naturalis principia mathematica (pubblicati nel 1687) e nel Trattato della quadratura delle curve. Definisce la nozione di infinitamente piccolo (il momento) e il modo di calcolare il limite delle somme e dei rapporti dei momenti. L'insieme prende il nome di calcolo delle flussioni. Le notazioni di Newton, meno comode di quelle di Leibniz non sono state conservate.

Leibniz (1646-1716)



Taylor

Inventore del calcolo infinitesimale, indipendentemente da Newton (Nova methodus pro maximis et minimis, 1684). L'idea essenziale di Leibniz consiste nel considerare che la caratteristica di una tangente in D ad una curva (vedi la figura sotto la voce «Pascal») è il triangolo AID, al quale il triangolo E'KE è sempre simile, anche se E ed E' sono infinitamente vicini l'uno all'altro sulla tangente. Il triangolo AID è chiamato assegnabile; il triangolo E'KE è inassegnabile quando diventa infinitamente piccolo. Tuttavia il rapporto $\frac{KE'}{KE}$ resta costante o uguale al rapporto $\frac{AI}{ID}$.

Così dunque, con Leibniz e Newton si trovano definite le regole del calcolo sulla grandezza infinitamente piccola, cioè del calcolo infinitesimale, che si divide ancora in due parti: il calcolo degli infinitesimi, a partire dalla grandezza funzionale data, e il calcolo di queste grandezze a partire dagli infinitesimi, cioè rispettivamente il calcolo differenziale e il calcolo integrale, che sono le due prime branche dell'Analisi.

Da Leibniz a Eulero (dal 1624 al 1740 circa)

Lo sviluppo del calcolo infinitesimale concerne, in questo periodo: 1 - Le questioni relative alle serie infinite. Sono da ricordare i nomi di: Brook Taylor (1665-1731), che dimostrò che una funzione di una sola variabile può essere messa sotto forma di una serie (sviluppo in serie di una funzione); Colin MacLaurin (1698-1745); Jean e Jacques Bernoulli (1667-1748 e 1654-1705).

che svilupparono il calcolo esponenziale. 2 - La risoluzione delle equazioni differenziali (vedi 517.4); L'Hospital (1661-1701), Varignon (1654-1722), Riccati (1676-1754), Fagnano (1682-1766).

2ª metà del XVIII secolo



Eulero

1ª metà del XIX secolo

È l'epoca in cui si sviluppa la teoria delle funzioni: studio delle variazioni di funzioni, calcolo dei differenziali e degli integrali relativi a certe funzioni, proprietà e valori delle funzioni come $(1+x)^n$, e^x , $\log(1+x)$ ecc. L'opera più vasta dell'epoca è quella di Eulero (1707-1783), che utilizza il calcolo infinitesimale per studiare le funzioni, da lui divise in funzioni algebriche (polinomi, ecc.) e funzioni trascendenti (funzioni circolari, logaritmi, ecc.).

Teoria delle funzioni ellittiche, attuata da Legendre (1752-1833), Carl Jacobi (1804-1851), Niels Henrik Abel (1802-1829); teoria delle funzioni analitiche, da Lagrange (1736-1813), e delle funzioni di una variabile complessa (Eulero, Lambert, Lagrange, ma soprattutto Gauss: 1777-1855). Problemi posti dalle serie, soprattutto dalle serie trigonometriche (Fourier, Gauss) e, in particolare, il problema della continuità delle funzioni, trattato in special modo da Cauchy (1789-1857).

2ª metà del XIX secolo



Weierstrass

XX secolo



Sierpinski

Il punto di partenza dei lavori di questo periodo è l'opera di Gauss e quella di Cauchy sulla continuità, sull'integrazione di certe funzioni, ecc. Riemann (1826-1866) e Weierstrass (1815-1897) rivedono sistematicamente tutti i settori dell'analisi e costruiscono la teoria delle funzioni di variabile reale che conducono allo studio delle discontinuità delle funzioni e ad una nuova definizione della nozione di integrale. Nello stesso tempo nascono numerose nuove difficoltà, soprattutto a proposito della ripartizione delle discontinuità delle funzioni; impostato da Dedekind, il problema è risolto da Cantor, l'inventore della teoria degli insiemi, mentre i lavori di Poincaré permettono di tirare una riga sopra l'analisi classica.

È caratterizzato dalla grande disputa assiomatica (vedi 512.1.A) e dagli sforzi dei matematici per elaborare la nozione di transfinito, strumento fondamentale dell'analisi moderna, di cui il rinnovatore fu Henri Lebesgue (1875-1941). Quest'ultimo ha introdotto una nuova definizione di integrale che ha sostituito la nozione classica di Riemann; la teoria moderna delle funzioni di variabile reale (Baire, Lebesgue, Borel) si basa sulla nozione di insieme. Congiunge i problemi di analisi funzionale (Volterra, Hadamard) con i lavori della scuola polacca e sovietica (Lusin, Sierpinski, ecc.). L'esposizione sistematica e assiomatica dell'analisi è stata ripresa, nella massima generalità, dai matematici della scuola di Bourbaki.

CALCOLO INTEGRALE

MATEMATICO E ESATTORE

Ciascuno conosce il principio delle parti di imposta. Per valutare l'imposta sul reddito dovuta da un contribuente, si divide il suo reddito x in intervalli e si applica ad ogni parte un tasso di imposta progressiva.

Prendiamo l'esempio di una legge fiscale che prevede un tasso $t_1 = 0\%$ per un reddito compreso tra 0 e 100 (100 escluso), il che si scrive, matematicamente :

$Ax, x \in [0, 100], t = 0$; un tasso $t_2 = 5\%$ per la parte che va da 100 a 300 (300 escluso), cioè:

$Ax, x \in [100, 300], t = 0,05$; eppure per $t_3 = 10\%$ si ha si ha un'analogia formula; per la parte che va da 300 a 500 (500 escluso), per $t_4 = 20\%$ si ha anche qua un'analogia formula per la parte che va da 500 a 700 (700 escluso),

per $t_s = 30\%$ con $x \geq 700$.

Ogni parte paga perciò un'imposta $y_1, y_2, \dots, y_n$ e

l'imposta globale dovuta dal contribuente è :

$y = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5$, che si può scrivere con il

simbolo $\sum$: ($y = \sum_{i=1}^5 y_i$ oppure più semplicemente $\sum_1^5 y_i$)

ciò può rappresentarsi graficamente nel modo indicato dalla figura di p.36

La curva II della figura di p. 36 è stata costruita in modo che, per ogni valore di x , la somma $y = \sum_1^5 y_i$ possa essere letta immediatamente.

In ogni intervallo $[x_i, x_i + 1]$, il grafico è una linea retta che rappresenta la funzione $y = f(x)$.

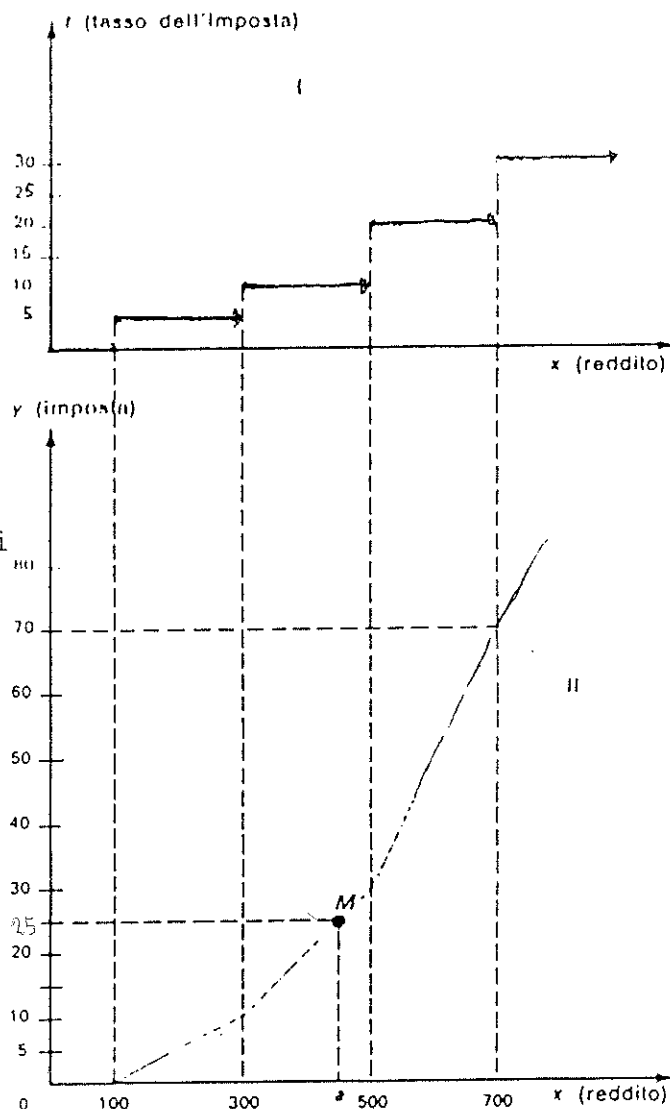
Per esempio, per $a = 450$, l'imposta è :

$$\left. \begin{array}{l} 1) 100 \times 0 = 0 = y_1 ; \\ 2) 200 \times 0,05 = 10 = y_2 \\ 3) 150 \times 0,1 = 15 = y_3 \end{array} \right\} \Rightarrow y = y_1 + y_2 + y_3 = 25$$

Calcolo fiscale

I curva dei tassi: t é costante in ogni intervallo, $f(x)$ é una funzione a scala.

II curva corrispondente delle imposte: la crescita non é la stessa in ogni intervallo della funzione; la funzione $y=f(x)$ é detta poligonale. Per determinare quanto un contribuente paga di tasse, basta condurre la parallela a Oy condotta dal punto M di ascissa $\overline{OM} = a =$ reddito considerato.



Guardando il problema da un punto di vista più matematico ne segue : ogni parte corrisponde ad un intervallo aperto a destra, $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$, a cui appartiene la variabile x (reddito).

La larghezza di un simile intervallo è $\Delta_{1x} = x_1 - x_0$ per il primo, $\Delta_{2x} = x_2 - x_1$, per il secondo, e così di seguito.

La y è stata calcolata mediante la relazione :

$$y = t_1 \cdot \Delta_{1x} + t_2 \cdot \Delta_{2x} + \dots + t_5 \cdot \Delta_{5x} = \sum_1^5 t_i \Delta_{ix}$$

o anche, poiché non c'è ambiguità, $y = \sum f(x) \Delta x$ essendo $f(x)$ una funzione a scala.

Supponiamo adesso che si voglia applicare la legge fiscale con una maggiore giustizia, bisognerà dividere il reddito in parecchie parti, il cui spessore Δx , sarà molto piccolo per esempio, $\Delta x = 100$, o $\Delta x = 10$...; a limite saremo portati a tenere conto di parti infinitamen-

te piccole dx , del reddito a cui si applica il tasso $f(x)$, e per calcolare y , noi dovremmo fare la somma di tutti i prodotti $f(x) \cdot dx, f(x) \cdot dx, \dots$, che saranno in quantità infinite.

Invece di scrivere questa somma con il simbolo, $\sum$ la indicheremo con il simbolo " $\int$ " che si legge "integrale" e avremo: invece di $y = \sum f(x) \cdot \Delta x$, $y = \int f(x) dx$.

La funzione y è chiamata l'integrale della funzione $f(x)$.

Passando così al limite la linea poligonale che rappresenta y si trasforma in curva continua $y = f(x)$ la cui derivata è $y' = \frac{dy}{dx}$ (infatti ogni ramo del grafico visto $y = \sum f(x) \cdot \Delta x$ corrisponde ad un "salto" $\Delta y = f(x) \Delta x$, da cui $f(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$; quando $\Delta x \rightarrow 0$ $f(x)$ è per definizione la derivata della funzione y).

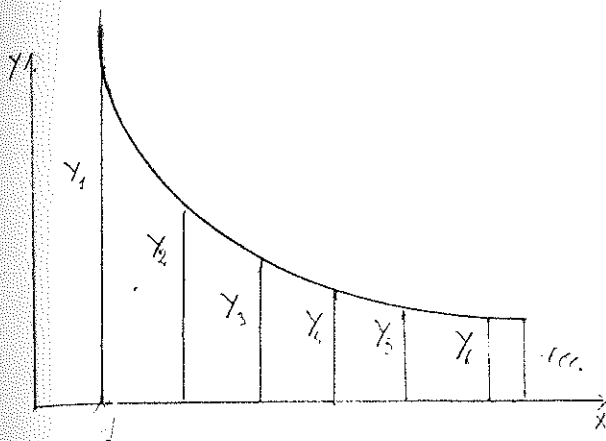
MATEMATICO ED AGRIMENSORE

Supponiamo che ci sia da misurare l'area compresa fra una curva di equazione $y = f(x)$, l'asse delle x e due ordinate aA e bB , parallele all'asse delle y le ascisse $x=a$ $x = b$; per esempio prendiamo in considerazione la curva $y = \frac{1}{x}$, $a = 1$ e $b = 3$

Per calcolare l'area delle figura dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in parti di spessore Δx molto piccolo (per es. $\Delta x = 1 \text{ mm.}$), che fornisca, tra $a = 1$ e $b = 3$, venti parti.

consideriamo d'altra parte, i rettangoli di larghezza Δx e di lunghezza $y_1 = \frac{1}{a} = 1$, $y_2 = \frac{1}{a + \Delta x}$; hanno per superficie $S_1 = \frac{1}{x_i} \cdot \Delta x$ ($x_i = x_1, x_2, \dots$)

(vedi grafico pag. successiva)



La somma degli S dà un'approssimazione della superficie cercata:

Rimpiazzando " $\sum$ " con " $\int$ " come in precedenza possiamo scrivere:

se avessimo cercato di calcolare la superficie compresa tra due ordinate qualsiasi di ascisse a e b avremmo trovato più in generale:

$$S_a^b \approx \sum_a^b \frac{1}{x_i} \cdot \Delta x \rightarrow \int_a^b \frac{1}{x} dx$$

CONFRONTO FRA QUESTI DUE ESEMPI

Nel primo caso (calcolo di una imposta), siamo partiti da una funzione a scala $f(x)$, per calcolare un'imposta $y = \sum f(x) \cdot \Delta x$; poi passando al limite, cioè considerando che gli "scalini" Δx di questa scala diventavano degli infinitamente piccoli dx , abbiamo scritto

$$y = \int f(x) dx .$$

Nel secondo caso (calcolo di una superficie), siamo partiti dalla funzione continua $f(x) = \frac{1}{x}$ per calcolare

un'area S ; poi abbiamo sostituito al grafico continuo di $y = \frac{1}{x}$, il grafico discontinuo di una funzione a scala i cui gradini avevano la larghezza Δx abbiamo anche calcolato una approssimazione di S , indicata $\sum_a^b \frac{1}{x_i} \cdot \Delta x$

e, passando al limite abbiamo scritto: $S_a^b = \int_a^b \frac{1}{x} dx$.

Da un punto di vista generale é possibile quando una funzione é continua :

1) approssimarla mediante una funzione a scala e calcolare una approssiamzione di $y = a \sum_a^b f(x_i) \cdot \Delta x$;

2) di passare al limite e di calcolare rigorosamente $y = \int_a^b f(x) \cdot dx$.

Il calcolo di Y é partire da y si chiama integrazione o calcolo integrale ; Y é un'integrale di y .

Abbiamo appena osservato che permette di valutare una imposta o una superficie.

Ma, ben inteso, se l'interesse del calcolo integrale si limitasse a facilitare il lavoro dell'esattore o dell'agrimensore, non meriterebbe tutti gli sforzi che gli sono stati consacrati dai matematici cominciando da Leibiniz .

Infatti, questo vasto campo dell'analisi matematica si applica a tutti i rami delle scienze fisiche ma soprattutto

to, costituisce una teoria molto ma molto completa e generale di cui ne indicherò i principi.

INTEGRALI DEFINITI

INTEGRALE SEMPLICE

Considerando una funzione $f(x)$, definita, reale e limitata in un intervallo $[a, b]$. La divisione in parti Δx della variabile x consiste nello scegliere su $[a, b]$ i punti (valori) successivi $x_0 = a$, $x_1, x_2, \dots, x_n$, $x_{m+1} = b$ e nel considerare gli intervalli $[a, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_p, x_{p+1}]$... $[x_m, b]$.

Su ogni $[x_p, x_{p+1}]$, prendiamo un valore arbitrario di x che chiamiamo ξ , e formiamo i prodotti:

$$(x_1 - a) f(\xi_0), \quad (x_2 - x_1) f(\xi_1),$$

$f(\xi_1)$ essendo il valore assoluto da $f(x)$ quando $x = \xi_1$ (nell'es. del calcolo di una imposta, era il tasso di ogni parte).

Posto questo, si dice $f(x)$ è integrabile nel senso di

Riemann su $[a, b]$ se la somma : $\sum = (x_1 - a) f(\xi_0) + \dots +$
 $+ (x_{p+1} - x_p) f(\xi_p) + \dots + (b - x_n) f(\xi_n)$

tende verso un limite finito¹, per qualsiasi scelta di ξ_p
quando il numero degli x_p tende verso l'infinito e quando
il più grande degli intervalli $[x_p, x_{p+1}]$ tende verso 0.

Se una funzione $f(x)$ è integrabile nel senso di Rie-
mann o più brevemente integrabile, si scrive: $I = \int_a^b f(x) dx$
notazione che si legge : "integrale (o somma) da a a b di
 $f(x)$ in dx ".

NOTA

- 1) I è un numero reale funzione di x ; eventualmente si
precisa I_a^b .
- 2) Questo numero I si chiama integrale definito di
 $f(x)dx$ su $[a, b]$.
- 3) il calcolo di I è una integrazione; è in generale un
calcolo difficile (tuttavia abbiamo notato che nel ca-
so in cui $f(x)$ era una funzione a scala il calcolo è
molto semplice .

PROPRIETA' DEGLI INTEGRALI DEFINITI

1) Se in un integrale definito si scambiano gli estremi, l'integrale conserva lo stesso valore assoluto, ma cambia segno cioè: $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.

2) se i due estremi, a e b sono eguali il valore dell'integrale è nullo: $\int_a^a f(x) dx = 0$.

3) (Proprietà additiva degli intervalli di integrazione).

Se c è un qualsiasi valore interno all'intervallo $[a, b]$

si ha: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

teoremi che ci permettono di stabilire l'integrabilità di una funzione; questa necessità nasce dal fatto che una funzione non è, a priori integrabile, poiché la somma non tende necessariamente verso un limite finito I

1) Se $f(x)$ è integrabile su $[a, b]$ e su $[b, c]$ essa è integrabile su $[a, c]$ e abbiamo: $I_a^b + I_b^c = I_a^c$

2) Una funzione a scala su $[a, b]$ è integrabile su $[a, b]$.

3) caso di una successione convergente di funzioni.

se si considera una successione $f_n(x)$ convergente uniformemente verso $f(x)$ su di un intervallo $[a, b]$.

Se le funzioni $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, ... sono tutte integrabili su $[a, b]$ a partire da un certo rango allora $f(x)$ è pure integrabile su $[a, b]$ e si ha :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Poiché $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ l'uguaglianza precedente si ottiene permutando i simboli: $\int_a^b$ e $\lim_{n \rightarrow \infty}$:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \Rightarrow \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

PRIMITIVE E INTEGRALI

Consideriamo la tavola di derivate seguenti, in cui c indica una costante:

Y	$Y' = y$
$Y = x + c$	$y = 1$
$Y = kx + c$	$y = k$
$Y = x^2 + c$	$y = 2x$
$Y = \log.x + c$	$y = \frac{1}{x}$

Possiamo anche considerare una tavola di primitive, leggendola da destra a sinistra.

$$(\text{Primitiva di } y = x) = \frac{x^2}{2} + c$$

$$(\text{Primitiva di } y = 1/x) = \log x + c$$

e ponendo $c = \log c$:

$$(\text{Primitiva di } y = 1/x) \quad \log x + \log c = \log cx$$

La costante c spiega che si sta parlando delle primitive di y e non della primitiva di y poiché c può prendere un'infinità di valori, e ad ognuno di essi corrisponde una primitiva particolare di y .

Al contrario, se imponiamo a Y di obbedire a certe condizioni, la costante c non è più arbitrale^{ria}. Per esempio, se si richiede di calcolare la primitiva di y che si annulla per $x = 5$, si procede in questo modo:

1) La primitiva di $y = x$ sono date dalla funzione generale:

$$f(x) = y = \frac{x^2}{2} + c$$

2) se $x = 5$, si ha : $f(x) = \frac{25}{2} + c$

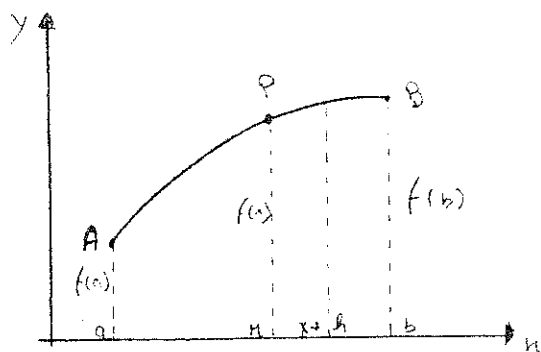
3) si vede che $f(5) = 0$ perciò $c = -\frac{25}{2}$

4) la primitiva cercata è $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{25}{2}$

Infine se $F(x)$ e $G(x)$ sono due primitive si ha obbligatoriamente $F(x) - G(x) = c$ (costante), poiché derivando i due membri si ottiene: $F'(x) - G'(x) = 0$.

CALCOLO DEGLI INTEGRALI DEFINITI

Prima di entrare nel vivo del problema é meglio dare uno sguardo al teorema fondamentale di Toricelli-Barrow (E. Torricelli nato nel 1608 e morto nel 1647 e originario da Faenza, insieme con I. Barrow nato nel 1630 e morto nel 1677 originario da Londra, maestro e predecessore di Newton a Cambridge, hanno dato origine a questo teorema che non a caso porta il loro nome).



Consideriamo un punto P qualsiasi dell'arco $\widehat{AB}$ della curva (Fig. sopra) e sia x la sua ascissa .

L'area del trapezoide limitato dalla curva, dall'asse x e dalle due ordinate relative ai due punti A e P sarà:

$$\int_a^x f(x) dx .$$

Se in questa formula teniamo fisso a e facciamo variare x l'area rappresentata da questo integrale varia e quindi si può dire che tale integrale è funzione di x e di conseguenza si può scrivere: $F(x) = \int_a^x f(x) dx$

La funzione $F(x)$ dicasi funzione integrale.

A questo punto ci proponiamo di dimostrare che: se la funzione è continua, la derivata della funzione integrale è $f(x)$. Per semplificare il lavoro, supponiamo che $f(x)$ sia crescente tra x ed $x + h$, e consideriamo il rapporto incrementale $[F(x + h) - F(x)]/h$.

Dato il significato geometrico di $F(x)$, si nota subito che: $F(x + h) - F(x)$ rappresenta l'area del trapezoide compreso fra il rettangolo di area $h \cdot f(x)$ ed il

rettangolo di area $h \cdot f(x + h)$ si ha quindi :

$$h \cdot f(x) < F(x + h) - F(x) < h \cdot f(x + h)$$

da cui dividendo tutto per h si ha:

$$f(x) < \frac{F(x + h) - F(x)}{h} < f(x + h)$$

passando al limite per $h \rightarrow 0$, $f(x)$ non cambia il suo valore e $f(x + h)$, poiché si tratta di una funzione continua tende ad $f(x)$.

Per il teorema del confronto si ha:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Ma, per definizione di derivata, il limite del rapporto incrementale di una funzione è la derivata della funzione stessa, quindi:

$$F'(x) = f(x) \text{ ovvero: } D \int_a^x f(x) dx = f(x)$$

Quest'ultima eguaglianza esprime il teorema di Torricelli-Barrow da essa si vede, che se su di una funzione $f(x)$ si esegue l'integrazione da un estremo fisso a ad un e-

stremo variabile x e poi la funzione così ottenuta si deriva rispetto alla x , si ottiene ancora la funzione $f(x)$.

Si può quindi dire che la derivazione rispetto alla variabile x è operazione inversa dell'integrazione da un estremo fisso all'estremo variabile x .

Concludendo possiamo dire che la funzione integrale è dunque una funzione la cui derivata è uguale alla funzione integranda $f(x)$ ed è perciò una primitiva di $f(x)$.

la primitiva più generale è allora:

$$\int_a^x f(x) + c$$

Ma la primitiva generale di $f(x)$ è il suo integrale indefinito e quindi : $\int f(x) dx = \int_a^x f(x) + c$

Ora possiamo dedicarci al calcolo degli integrali definiti: ponendo $\varphi(x) = \int f(x) dx$

la relazione precedente assume la forma $\varphi(x) = \int_a^x f(x) + c;$

se si pone ancora $x = a$ e se si ricorda che $\int_a^a f(x) dx = 0$

si ha: $\varphi(a) = c$.

Se si pone inoltre $x = b$ si ha $\varphi(b) = \int_a^b f(x) dx + c$

tenendo presente la relazione $\varphi(a) = c$ si ha:

$$\int_a^b f(x) dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

Generalmente quest'ultima uguaglianza si scrive come se-

gue: $\int_a^b f(x) dx = \left| \varphi(x) \right|_a^b$, ossia: l'integrale definito di

una funzione é uguale alla differenza dei valori che l'in-

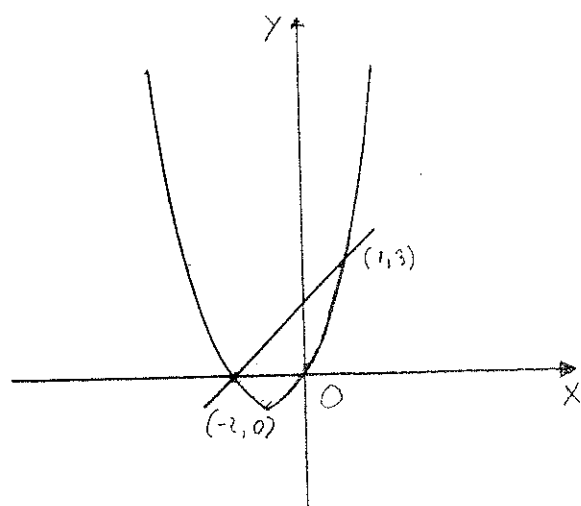
tegrale indefinito assume negli estremi dell'intervallo

di integrazione.

APPLICAZIONE MATEMATICHE DEGLI INTEGRALI DEFINITI

Una delle più importanti applicazioni matematiche è il calcolo dell'area di alcune figure piane.

Esempio: calcolare l'area della superficie limitata dalla parabola $y = x^2 + 2x$ e della retta $y = x + 2$



$y = x^2 + 2x$		$y = x + 2$	
x	y	x	y
0	0	0	2
1	3	1	3
2	8	2	4
-1	-1	-1	1
-2	0	-2	0
-3	3		
-4	8		

Le ascisse dei punti di intersezione della parabola (fig. sopra) con la retta si ottengono risolvendo il si-

stema:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x \\ y = x + 2 \end{cases}$$

eliminado y fra le due eq. si ha:

$$x^2 + 2x = x + 2 \text{ ossia : } x^2 + x - 2 = 0$$

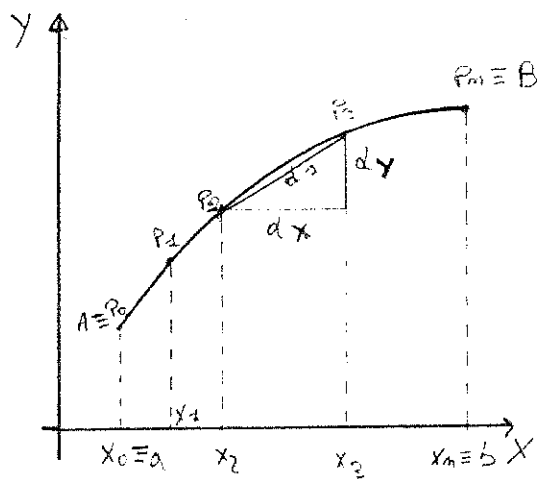
che dà le radici: $x_1 = 1$; $x_2 = -2$

L'area richiesta é quindi data:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^1 (2 + x) dx - \int_{-2}^1 (x^2 + 2x) dx = \int_{-2}^1 (2 - x^2 - x) dx = \\ &= \left| 2x - x^3/3 - x^2/2 \right|_{-2}^1 = 9/2 = 4,5. \end{aligned}$$

Un'altra applicazione matematica degli integrali definiti é quella di dettrminare la lunghezza di un arco di curva piana.

Dato un arco $\widehat{AB}$ di curva piana e di eq. $y = f(x)$, compreso fra le coordinate corrispondenti alle ascisse a e b dividiamo l'intervallo (a,b) in parti (fig. p.) mediante i punti $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$



e dai punti $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ conduciamo le perpendicolare all'asse x , queste perpendicolari incontreranno l'arco $\widehat{AB}$ nei punti $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n$. La spezzata ottenuta congiungendo questi punti si dice inscritta in $\widehat{AB}$ e la sua lunghezza l dipende in genere dal modo come è stato diviso in parti l'intervallo (a, b) .

Dicesi lunghezza dell'arco di curva $\widehat{AB}$, il limite della lunghezza di una spezzata inscritta quando i suoi lati tendono a zero.

Se S è la lunghezza dell'arco di curva $\widehat{AB}$ per definizione si ha: $S = \lim_{h \rightarrow 0} L$ ove h è la misura del lato più grande della spezzata e L è la misura della spezzata.

Se consideriamo il piccolo triangolo rettangolo che ho disegnato opportunamente sulla figura di p. si può scrivere per il teorema di Pitagora che :

$d^2s = d^2x + d^2y$ ma ricordando la : $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ si può

scrivere $dy = f'(x)dx$ e ritornando alla formula di partenza tenendo presente quanto detto si può scrivere:

$d^2s = d^2x + f'(x)d^2x$ e mettendo in evidenza d^2x si ha:

$d^2s = [1 + f'^2(x)]d^2x$ dalla quale formula estraendo la radice quadrata ad ambo i membri si ha:

$$ds = \sqrt{1 + f'^2(x)} dx, \text{ quindi } S = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

Se la curva è data in forma parametrica $x = x(t)$; $y = y(t)$ con t variabile in (t_0, t_1) la lunghezza S è data dalla formula che segue :

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$$

Se la curva è rappresentata in coordinate polari dall'eq. $\rho = \rho(\theta)$ con θ variabile nell'intervallo (θ_1, θ_2) , la lunghezza S è data dalla formula che segue:

$$S = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} d\theta$$

Esempio :

1) calcolare la lunghezza S dell'arco di cerchio $\widehat{AB}$, sa-

pendo che il cerchio ha per centro l'origine e per raggio l'UNITÀ.

L'equazione del cerchio é $x^2 + y^2 = r^2$, da cui, differenziando, si ha : $2x + 2y y' = 0$, da cui $y' = -x/y$ si ha perciò, con $y^2 = r^2 - x^2$:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (x/y)^2} dx = \int_a^b \left[r^2 / (r^2 - x^2) \right]^{1/2} dx = \\ = \pm r \int_a^b dx / \left(\sqrt{r^2 - x^2} \right) = I_a^b.$$

In base alla formula: $\int d\omega / \left(\sqrt{a^2 - \omega^2} \right) =$

$= \arcsen (x/r) + c$; si ottiene che

$$I_a^b = \pm r \left[\arcsen (b/r) - \arcsen (a/r) \right].$$

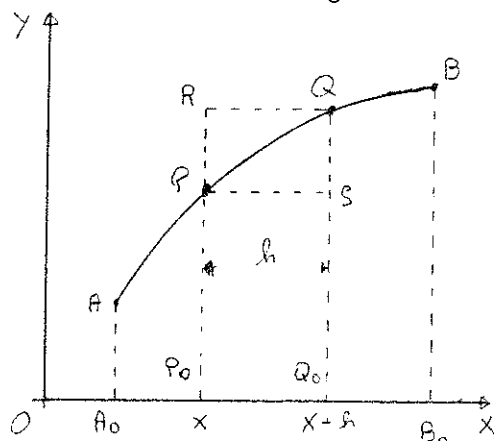
Se prendiamo $a = r$ e $b = 0$ ($\widehat{AB} = \pi/2$, limitandoci alla determinazione principale), troviamo :

$\arcsen (b/r) = 0$, $\arcsen (a/r) = \pi/2$ e $I_a^b = \pm \pi \cdot r/2$.

Altra applicazione matematica degli integrali definiti é quella che ci permette di calcolare il volume di un solido di rotazione.

Sia data la funzione $f(x)$ la quale, per ipotesi non assume mai valori negativi nell'intervallo (a, b) che si considera.

Il suo grafico (vedi fig. sotto) sarà allora tutto sul semipiano delle ordinate positive e sarà positivo il valore dell'integrale: $\int_a^b f(x)dx$



Questo integrale rappresenta l'area del trapezoide limitato dalla curva, l'asse x e le ordinate $f(a)$ ed $f(b)$.

Si consideri ora il solido di rotazione generato dalla rotazione del trapezoide attorno all'asse x .

Supposto a costante ed x variabile, il volume del

solido di rotazione è una funzione di x e sarà indicato con $v(x)$.

Supposto h convenientemente piccolo l'incremento $v(x+h) - v(x)$ si può considerare, con grande approssimazione, eguale al volume di un cilindro che abbia come raggio di base $f(x)$ e per altezza h ; si può quindi scrivere: $v(x+h) - v(x) = \pi [f(x)]^2 h$ o meglio :

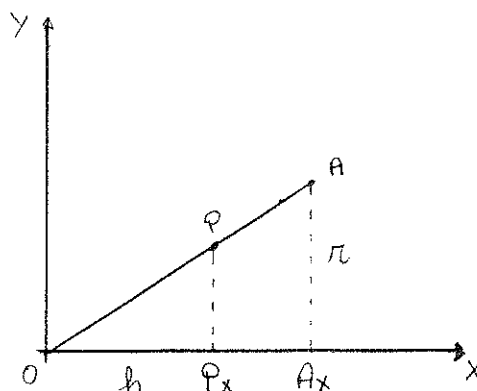
$$\frac{v(x+h) - v(x)}{h} = \pi [f(x)]^2$$

il primo membro dell'ultima equazione è il rapporto incrementale della funzione $v(x)$ passando al limite per $h \rightarrow 0$, si ha: $v'(x) = \pi f^2(x)$ integrando fra gli estremi a e b si ottiene il volume del solido di rotazione:

$$v = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Esempio:

calcolare il volume di un cono circolare retto.



Il cono circolare retto si può considerare generato dalla rotazione di un triangolo rettangolo intorno ad uno dei suoi cateti .

Sia (fig. sopra) A O Ax un triangolo rettangolo di cateti $\overline{O Ax} = h$ ed $\overline{A Ax} = r$; facendo ruotare intorno al cateto O Ax, ogni punto P dell'ipotenusa O A descrive una circonferenza di raggio P Px.

Se x é l'ascissa di O Px, dai triangoli simili O P Px, O A Ax si ha:

$$\overline{P Px} : x = r : h, \text{ da cui } \overline{P Px} = rx/h .$$

Quindi un cerchio sezione del cono ha l'

area $\pi r^2 x^2/h^2$ ed il volume del cono é:

$$V = \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{1}{3} \pi r^2 h,$$

com'è noto dalla geometria elementare.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Scopo dell'algebra "elementare" era quello di risolvere tutti i problemi geometrici, algebrici e non mediante l'ausilio delle equazioni algebriche di I°, II° grado, e di grado superiore al primo e al secondo.

In questioni tecniche in particolare am anche finanziarie (matematica finanziaria) si presentano dei problemi che a differenza di quelli risolvibili mediante eq. del genere visto in algebra elementare non possono risolversi procedendo per quella via; infatti, spesso, abbiamo a che fare con problemi di elettrotecnica, meccanica, matematica finanziaria, ecc... che si traducono in un'equazione contenente una funzione incognita e la sua derivata prima questo nuovo tipo di eq. si chiamano eq. differenziali di primo ordine.

Precisamente: si chiama eq. differenziale del primo ordine un'eq. nella quale figura come incognita una funzione $y=y(x)$ di una variabile x , e che stabilisca un legame fra la variabile x , la funzione y e la derivata prima (y') di questa funzione.

Una tale eq. é dunque del tipo:

$$(1) \quad f(x, y, y') = 0,$$

dove $f(x, y, y')$ é una funzione della variabile indipendente (x, y, y') , definita in un certo campo dello spazio a tre dimensioni.

Una funzione $y = \varphi(x)$ dotata, in un intervallo (a, b) , della derivata prima e tale che, per ogni x di (a, b) risulti :

$$f[x, \varphi(x), \varphi'(x)] = 0,$$

si dice una soluzione o un integrale dell'eq. (1) .

La curva corrispondente, di eq. : $y = \varphi(x)$, si dice una curva una curva integrale dell'eq. stessa.

Risolvere o meglio integrare l'eq. data significa trovare tutte le sue soluzioni .

Un eq. differenziale del primo ordine si dice di forma normale o canonica quando é data sotto la forma:

$$y' = f(x,y),$$

Vale a dire quando é data risolta rispetto alla derivata prima.

Per vedere meglio come é costituita la totalità delle soluzioni (o integrali) di una eq. differenziale del primo ordine guardiamo il seguente esempio.

Risolvere la seguente eq. differenziale del primo ordine é di forma normale:

$$(2) \quad y' = y$$

Si tratta quindi di trovare tutte le funzioni della variabile x che soddisfano la (2).

A tale scopo si osservi innanzitutto che detta c

una costante arbitraria, la funzione

$$(3) \quad y = c e^x ,$$

è una soluzione come si verifica subito dell'eq. differenziale (2).

Viceversa, se $\varphi(x)$ è una soluzione della (2), cioè se risulta:

$$(4) \quad \varphi'(x) - \varphi(x) = 0,$$

moltiplicando ambo i membri della (4) per e^{-x} , si ottiene:

$$e^{-x} \varphi'(x) - e^{-x} \varphi(x) = 0$$

ossia:

$$[e^{-x} \varphi(x)]' = 0$$

di cui segue che deve necessariamente essere:

$$e^{-x} \varphi(x) = K \quad ; \quad \frac{1}{e^x} \varphi(x) = K$$

con K numero opportuno, vale a dire : $\varphi(x) = K e^x$.

Si vede così che $\varphi(x)$ si deduce dal (3) attribuendo alla costante c il valore k .

Ne segue che tutte le soluzioni dell'eq. differenziale considerata sono date dalla formula (3), al variare della costante c .

Dunque, l'eq. presa in esame ammette infinite soluzioni che dipendono da una costante arbitraria

CONTINUAZIONE

L'esempio considerato precedentemente lascia prevedere che per un'eq. differenziale del primo ordine si hanno, almeno sotto opportune ipotesi infinite soluzioni in dipendenza degli infiniti valori di una certa costante .

Tale previsione é confermata dall'enunciato del teorema che segue:

Teorema di Cauchy.- Sia $f(x,y)$ una funzione di due varia-

bili indipendenti (x,y) definiti nel rettangolo R :

$$R: \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d,$$

ed ivi continua e supponiamo sia dotata di derivata parziale prima continua fatta rispetto alla y nei punti interni a R .

In tale ipotesi se (x_0, y_0) è in un punto qualsiasi interno al rettangolo R , l'eq. differenziale :

$$y' = f(x,y);$$

ammette una e una sola soluzione:

$$y = \varphi(x),$$

definita in un certo intorno del punto x_0 , soddisfacente la condizione:

$$\varphi(x_0) = y_0;$$

tale condizione si suole anche chiamare condizione iniziale.

Dal teorema enunciato segue, quindi che l'eq. diffe-

renziale di forma normale $y' = f(x,y)$ ammette infinite curve integrali, tali che per ogni dato punto interno ad R , ne passa una e una sola.

Queste infinite curve integrali saranno rappresentate da un'eq. del tipo :

$$(5) \quad y = \Phi(x, c),$$

ove c é una costante arbitraria.

Si suole dire che la (5) definisce l'integrale generale dell'equazione differenziale data.

Ogni curva integrale dedotta dalla (5) dando alla costante c un particolare valore numerico si dice un integrale particolare dell'equazione.

RISOLUZIONE DI ALCUNI TIPI PARTICOLARI DI EQUAZIONI
DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE IN FORMA NORMALE

L'equazione differenziale del primo ordine, in forma normale:

$$y' = f(x,y);$$

posto:

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = y'dx$$

si può scrivere sotto la formula:

$$\frac{dy}{dx} - f(x,y) = 0;$$

$$dy - f(x,y)dx = 0$$

che é un caso particolare della seguente eq.:

$$(6) \quad M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

ad essa equivalente per $N(x,y) \neq 0$.

Ora vediamo come in alcuni casi , molto particolari

si può risolvere la (6); applicando metodi elementari.

1°) Equazioni differenziali a variabili separate

Una eq. differenziale del primo ordine si dice a variabile separata quando può scriversi sotto la forma:

$$(7) \quad M(x)dx + N(y)dy = 0,$$

cioè quando il coefficiente del dx è una funzione della sola x e il coefficiente del dy è una funzione della sola y .

Integrando ambo i membri della (7) si ottiene:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = c;$$

che definisce l'integrale generale dell'eq. differenziale (7).

Esempi.

1) risolvere l'eq. a variabile separate:

$$x \operatorname{sen} x \, dx + y \, dy = 0;$$

si ha:

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx + \int y \, dy = c,$$

e calcolando l' $\int x \sin x \, dx$ per parti, si ottiene:

$$- 2x \cos x + 2 \sin x + \cancel{2} \frac{x^2}{\cancel{2}} = 2C ;$$

$$y^2 = 2C + 2x \cos x - 2 \sin x ;$$

$$y = \pm \sqrt{2C + 2x \cos x - 2 \sin x} ;$$

che é l'integrale generale dell'equazione data,

2) risolvere l'eq. a variabile separata:

$$x dx + \frac{1}{y^2} dy = 0 ;$$

e determinare poi la curva integrale passante per il punto di coordinate (1,3) si ha:

$$\int x dx + \int \frac{1}{y^2} dy = c$$

$$\text{e quindi: } \frac{x^2}{2} - \frac{1}{y} = c$$

ossia:

$$(1) \quad y = \frac{2}{x^2 - 2c}$$

che é l'integrale generale dell'eq. data.

Per determinare ora l'eq. della curva integrale passante per il punto di coordinate (1,3) dobbiamo nella (1) porre 3 al posto della y ed 1 al posto della x e poi determinare la costante c dell'eq. che ne risulta. Si ha:

$$3 = \frac{2}{1-2c}$$

da cui si ricava $c = 1/6$.

L'integrale particolare é quindi :

$$y = \frac{2}{x^2 - 1/3}$$

2°) Equazioni differenziali a variabili separabili

Un eq. del primo ordine si dice a variabile separabile quando si può scrivere sotto al forma :

$$(8) \quad \varphi(x) \cdot \psi(y) dx + \varphi_1(x) \cdot \psi_1(y) dy = 0,$$

cioé quando il coefficiente del dx e del dy sono entrambi prodotti di una funzione della sola x per una funzione della sola y o viceversa cioè che il coefficiente del dx

sia una funzione della sola y e quindi quello del dy funzione della sola x .

Essa si riduce a variabile separate dividendo i due membri per $\psi(y) \cdot \varphi_1(x)$.

L'eq. che risulta:

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} dx + \frac{\psi_1(y)}{\psi(y)} dy = 0 ;$$

si risolve come nel caso precedente.

Esempi.

1) risolvere l'eq. a variabile separabile:

$$\frac{2x}{y} dx + (1+x^2) dy = 0 .$$

separando le variabili si ottiene:

$$\frac{2x}{1+x^2} dx + y dy = 0$$

da cui

$$\int \frac{2x}{1+x^2} dx + \int y dy = c ;$$

ossia:

$$\log (1+x^2)+y^2/2 = c$$

è quindi :

$$y = \pm \sqrt{2c - 2\log(1+x^2)},$$

che è l'integrale generale dell'equazione data.

2) Risolvere l'eq.:

$$y' = \frac{x+1}{y}$$

si ha:

$$dy - \frac{x+1}{y} dx = 0;$$

e separando le variabili si ottiene:

$$ydy - (x+1)dx = 0,$$

da cui:

$$\int ydy - \int (x+1)dx = \bar{c};$$

ossia

$$\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} - x = c ,$$

e quindi:

$$y = \pm \sqrt{2c + x^2 + 2x},$$

che é l'integrale generale dell'equazione data.

3°) Equazioni lineari

Un'equazione differenziale del primo ordine si dice lineare quando é di primo grado nel complesso della funzione incognita y e della sua derivata prima y' essa potrà quindi scriversi sotto la forma:

$$(9) \quad y' + p(x)y = q(x),$$

dove $p(x)$ e $q(x)$ sono funzioni note della variabile x , che supponiamo continue .

Se é $q(x) = 0$, l'eq. lineare si dice omogenea in caso contrario si dice non omogenea.

Si può dimostrare che l'integrale generale dell'eq. lineare (9) é dato dalla formula:

$$(10) \quad y = e^{-\int p(x) dx} \left[\int e^{\int p(x) dx} \cdot q(x) dx + c \right],$$

ma ciò esula completamente da questa trattazione elementare quindi la dò per scontato.

Esempi.

1) Risolvere l'eq. lineare:

$$y' - \frac{1}{x} y = x^3,$$

e determinare poi la curva integrale passante per il punto di coordinate (1, -3).

In questo caso é: $p(x) = 1/x$, $q(x) = x^3$ e perciò, in base alla formula (10) si ha :

$$y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left[\int e^{\int \frac{1}{x} dx} \cdot x^3 dx + C \right]$$

essendo:

$$e^{-\int \frac{1}{x} dx} = \frac{1}{e^{\int \frac{1}{x} dx}} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}, \quad e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\log x} = x,$$

si ottiene:

$$y = \frac{1}{x} \left[\int x^4 dx + C \right] = \frac{1}{x} \left[\frac{x^5}{5} + C \right];$$

e quindi :

$$y = \frac{x^4}{5} + \frac{c}{x}$$

é l'integrale generale dell'equazione data.

Per determinare l'equazione della curva integrale passante per il punto (1,-3) basta determinare la costante c dall'equazione:

$$-3 = \frac{1}{5} + c, \Rightarrow c = -\frac{16}{5}$$

e quindi:

$$y = \frac{x^4}{5} - \frac{16}{5x},$$

é l'integrale particolare chiesto.

2) Risolvere l'equazione lineare:

$$y' + \operatorname{tg} x \cdot y = \operatorname{sen} 2x.$$

Qui é : $p(x) = \operatorname{tg} x$, $q(x) = \operatorname{sen} 2x$, e perciò in base alla

formulà (10), si ha : $y = e^{-\int \operatorname{tg} x dx} \left[\int e^{\int \operatorname{tg} x dx} \cdot \operatorname{sen} 2x dx + c \right] =$

$$\begin{aligned} &= e^{\log \cos x} \left[\int e^{-\log \cos x} \cdot 2 \sin x \cos x \, dx + c \right] = \\ &= \cos x \left[\int \frac{1}{\cos x} \cdot 2 \sin x \cos x \, dx + c \right] = \cos x \left[\int 2 \sin x \, dx + c \right], \\ &- \end{aligned}$$

e quindi l'integrale generale dell'equazione data é:

$$y = \cos x (-2 \cos x + c).$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL SECONDO ORDINE

Si chiama equazione differenziale del secondo ordine un'equazione che stabilisca un legame fra una variabile indipendente x , una funzione y di questa variabile e la derivata prima e seconda di questa funzione.

Una tale equazione è dunque del tipo:

$$(1) \quad F(x, y, y', y'') = 0$$

Una funzione $y = \varphi(x)$ dotata, in un intervallo (a, b) della derivata prima e seconda e tale che, per ogni x di (a, b) risulti:

$$F[x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)] = 0$$

si dice una soluzione o un integrale dell'eq. (1).

la curva corrispondente di eq. $y = \varphi(x)$; si dice una curva integrale dell'equazione stessa.

Risolvere o integrare l'eq. data significa trovare

tuutte le sue soluzioni.

Un'equazione del secondo ordine si dice di forma normale quando è data sotto la forma:

$$y'' = f(x, y, y'),$$

vale a dire quando è data risolta rispetto alla derivata seconda.

EQUAZIONI LINEARI DEL SECONDO ORDINE A
COEFFICIENTI COSTANTI E OMOGENEE

Per sviluppare bene questa parte di matematica relativa alle equazioni differenziali del secondo ordine occorrerebbe molto tempo e uno studio molto più approfondito e dettagliato, io momentaneamente mi soffermo anche se superficialmente sulle equazioni lineari del secondo ordine a coefficiente costante e omogeneo, ossia di quell'equazioni che sono del tipo :

$$(2) \quad y'' + ay' + by = 0,$$

dove a e b sono numeri reali.

L'equazione algebrica di secondo grado nell'incognita z , dedotta dall'eq. differenziale (2) :

$$(3) \quad z^2 + az + b = 0,$$

si chiama equazione caratteristica della (2).

Come sappiamo dall'algebra elementare si possono distinguere tre casi relativi alle soluzioni della (3)

1°) l'equazione caratteristica (3) ammette due radici reali e distinte, z_1 , z_2 .

In questo caso si può dimostrare che l'integrale generale dell'eq. differenziale (2) è dato da:

$$y = C_1 e^{z_1 x} + C_2 e^{z_2 x}$$

ove c_1 e c_2 sono due costanti arbitrarie.

2°) L'eq. caratteristica (3) ammette una sola radice (o, come si suole anche dire due radici coincidenti), z_1 .

In questo caso si può dimostrare che l'integrale generale dell'equazione differenziale (2) è dato da:

$$y = c_1 e^{z_1 x} + c_2 x e^{z_1 x}$$

3°) L'equazione caratteristica (3) ammette due radici complesse coniugate, $c + id$ e $c - id$ in questo caso l'integrale generale dell'eq. differenziale (2) è dato da:

$$y = c_1 e^{cx} \cos dx + c_2 e^{cx} \sin dx.$$

Esempi.

1) Risolvere l'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine a coefficiente costante:

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

La sua equazione caratteristica è :

$$z^2 - 5z + 6 = 0,$$

che ha radici reali che valgono 2 e 3.

L'integrale generale dell'eq. differenziale è quindi :

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}.$$

2) Risolvere l'equazione :

$$y'' - 10y' + 25y = 0$$

questa é un'equazione differenziale dello stesso tipo di
prima la sua eq. caratteristica é:

$$z^2 - 10z + 25 = 0$$

che ammette l'unica radice $z = 5$.

L'integrale generale dell'eq. differenziale é quindi:

$$y = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x}$$

3) risolvere l'equazione:

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

L'equazione caratteristica é :

$$z^2 - 2z + 5 = 0$$

risolvendo si ha:

$$z_1 = 1 - 2i, \quad z_2 = 1 + 2i.$$

Essendo, in questo caso, $c = 1$, $d = 2$, l'integrale genera-
dell'equazione differenziale proposta é:

$$y = c_1 e^x \cos 2x + c_2 e^x \sin 2x$$

4) Risolvere l'equazione :

$$y'' + 9y = 0$$

L'eq. caratteristica é :

$$z^2 + 9 = 0 \quad z_1 = -3i, \quad z_2 = 3i$$

Essendo in questo caso $c = 0$, $d = 3$ l'integrale genera-

le dell'eq. differenziale é:

$$y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x .$$

ALCUNE APPLICAZIONI DI ALCUNI TIPI DI EQUAZIONI
DIFFERENZIALI ALL'ELETTROTECNICA

APPLICAZIONE RELATIVA AD UNA
EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL
PRIMO ORDINE

Se si ha un circuito elettrico alimentato da una forza elettromotrice E , con una resistenza, di induttanza costante L e percorso da una corrente i . Alla chiusura o all'apertura del circuito nasce in esso una f.e.m. di auto-induzione data da $-L \frac{di}{dt}$ e allora, in un istante generico, si ha :

$$Ri = E - L \frac{di}{dt}$$

ossia dividendo per L ed isolando il termine di/dt si ha:

$$\frac{di}{dt} = - \frac{R}{L} i + \frac{E}{L}$$

che é un'equazione differenziale lineare il cui integrale generale é dato da:

$$i = e^{-\frac{R}{L}t} \left[\int \frac{E}{L} e^{\frac{R}{L}t} dt + c \right],$$

$$i = e^{-\frac{R}{L}t} \left[\frac{E}{R} e^{\frac{R}{L}t} + c \right],$$

Ora nell'ipotesi di E costante si ha:

$$i = e^{-\frac{R}{L}t} \frac{E}{R} e^{\frac{R}{L}t} + c \cdot e^{-\frac{R}{L}t},$$

$$i = \frac{E}{R} + c e^{-\frac{R}{L}t}$$

Da questa relazione si deduce che la corrente i é la somma di una corrente stazionaria di valore E/R , e di un termine transitorio $c e^{-\frac{R}{L}t}$ (extra corrente) che dipende dalle condizioni iniziali e destinato ad estinguersi col tempo.

Per la determinazione della costante c possiamo procedere come segue:

1) Chiudendo il circuito, abbiamo come condizioni iniziali

$i = 0, t = 0$; questi valori sostituiti nella (2) permettono di determinare la costante c e precisamente si ha: $c = -E/R$ dalla quale si ottiene la soluzione completa del problema espressa da :

$$i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}} \right) = i_0 \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}} \right).$$

Questa relazione precisa che l'extra corrente di chiusura contrasta la stabilità della corrente i_0 nel circuito.

2) Aprendo il circuito si hanno come condizioni iniziali:

$i = i_0, t = 0$ ed $E = 0$ da cui si deduce $c = i_0$

e allora l'extracorrente di apertura è data da: $i = i_0 e^{-\frac{Rt}{L}}$

Tale corrente è diretta nel senso della corrente presente nel circuito.

APPLICAZIONE RELATIVA AD UNA
EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL
SECONDO ORDINE

Se noi guardiamo lo studio relativo alla scarica di un condensatore di capacità C attraverso una resistenza R e una induttanza L, si perviene all'eq.

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{e}{C} = 0$$

che é della forma:

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

dove a,b,c, sono costanti assegnate ; la sua equazione caratteristica é :

$$az^2 + bz + c = 0$$

a secondo dei casi possiamo applicare la relativa formula risolutiva e quindi risolvere il problema.

INTEGRALI SU PERSONAL COMPUTER

Per questioni di tempo ritengo opportuno fare una breve introduzione su ogni programma che intendo scrivere e non una spiegazione approfondita.

METODO DEI TRAPEZI

Il programma calcola l'approssimazione di ordine h^4 dell'integrale .

Le derivate sono valutate grazie alle formule:

$$f'(a) = \frac{f(a+k) - f(a)}{k} \quad e \quad f'(b) = \frac{f(b) - f(b-k)}{k}$$

dove

$$k = 0,001$$

questa approssimazione é del tutto soddisfacente quando la lunghezza dell'intervallo di integrazione é dell'ordine dell' unità.

La funzione dell'integrale deve essere programmata alla linea 50 :

```
50 DEF FN F(X) = X.X
```

Occorre in seguito introdurre nel programma i due limiti a e b nell'intervallo dell'integrazione, poi il numero del passo d'integrazione (numero di sottointervallo).

Il valore calcolato é tanto più preciso quanto più n é grande.

```
1000 CLS
1010 PRINT TAB( 5);"METODO DEI TRAPEZI": PRINT : PRINT
1020 INPUT "A=";A
1030 INPUT "B=";B
1040 INPUT "N=";N
1050 H = (B - A) / N
1060 T = FN F(B)
1070 T = (T + FN F(A)) / 2
1080 X = A
1090 FOR I = 1 TO N - 1
1100 X = X + H:T = T + FN F(X)
1110 NEXT I
1120 K = .001
1130 D = FN F(A + K) - FN F(A)
1140 D = D - FN F(B) + FN F(B - K)
1150 D = D * H / K / 12
1160 T = (T + D) * H
1170 PRINT : PRINT "L'INTEGRALE VALE:";T
1180 PRINT : INPUT "VOLETE RIUTILIZZARE IL PROGRAMMA:";Z$
1190 IF Z$ = "S" THEN 1000
```

ESEMPI COMMENTATI

Esempio 1:

Si debba calcolare l'integrale:

$$I = \int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2} dx$$

50 DEF FN F(X) = SQR(1-X * X)

A = 0

B = 0,5

N = 100

L'integrale vale: .478305736

volete riutilizzare il programma?:N

Si ottiene con 100 passi di integrazione:

I=0,478305736

Il valore esatto é:

$$\int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} = 0,478305731$$

Esempio 2:

Si debba calcolare l'integrale:

$$I = \int_1^2 (x^{14} - 8x^{11} + 3x^3) dx$$

```
50 DEF FN F(X) = X^14-8*X^11+3*X^3
```

```
A=1
```

```
B=2
```

```
N=500
```

L'integrale vale: -534.283321

Volete riutilizzare il programma ? :N

Il valore esatto é: - 534.2833...

Il risultato ottenuto é abbastanza preciso, ma é stato calcolato con 500 passi di integrazione, il che é già notevole, e necessita di un tempo di esecuzione relativamente lungo (da uno e tre minuti a seconda del calcolatore).

METODO DI SIMPSON

L'impiego é identico a quello del programma precedente la funzione può essere programmata alla linea 50, e occorre introdurre i limiti e il numero dei passi di integrazione.

```
2000  CLS
2010  PRINT TAB( 5); "METODO DI SIMPSON": PRINT : PRINT
2020  INPUT "A="; A
2030  INPUT "B="; B
2040  INPUT "N="; N
2050  H = (B - A) / 2 / N
2060  T = ( FN F(A) + FN F(B)) / 2
2070  X = A
2080  FOR I = 1 TO N - 1
2090  X = X + H: T = T + 2 * FN F(X)
2100  X = X + H: T = T + FN F(X)
2110  NEXT I
2120  X = X + H: T = T + 2 * FN F(X)
2130  T = 2 * H * T / 3
2140  PRINT : PRINT "L'INTEGRALE VALE:"; T
2150  PRINT : INPUT "VOLETE RIUTILIZZARE IL PROGRAMMA:"; Z#
2160  IF Z# = "S" THEN 2000
```

ESEMPI COMMENTATI

Esempio 1:

Si debba calcolare:

$$I = \int_5^{11} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 6x + 8}} dx$$

```
50 DEF FN F(X) = 1 / SQR (X* X - 6 * X + 8)
```

A= 5

B= 11

N= 100

L'integrale vale : 1.45170151

volete riutilizzare il programma?:N

Il valore esatto é :

I= 1,45170149

Il valore ottenuto con 100 passi di integrazione presenta un errore trascurabile..

Esempio 2:

Riprendiamo il calcolo di:

$$\int_1^2 (x^{14} - 8x^{11} + 3x^3) dx$$

```
50 DEF FN F(X) = X ^ 14 - 8 * X ^ 11 + 3 * X ^ 3
```

```
A = 1
```

```
B = 2
```

```
N = 100
```

```
L'integrale vale: -2697.74971
```

```
voLETE riutilizzare il programma?: N
```

L'errore sul risultato é confrontabile con quello ottenuto con il metodo dei trapezi.

METODO DI VILLARCEAU

Questo é l'ultimo dei metodi di Cotes che analizzerò.

Anch'esso si basa sulla decomposizione di n sottointervalli di (a,b) ma la funzione é sostituita questa volta da un polinomio di grado 4

Si pone quindi:

$$h = \frac{b-a}{4m} \quad e \quad x_i = a + i h$$

Si dimostra allora che su ogni intervallo $[x_{4i}, x_{4i+4}]$

l'integrale:

$$\int_{x_{4i}}^{x_{4i+4}} f(x) dx$$

é approssimata da:

$$T_{4i} = \frac{2h}{45} [7f(x_{4i}) + 32f(x_{4i+1}) + 12f(x_{4i+2}) + 32f(x_{4i+3}) + 7f(x_{4i+4})]$$

l'integrale vale allora: $I = \sum_{i=0}^{m-1} T_{4i}$

Questa approssimazione di $\int_a^b f(x) dx$ é di ordine h^6 .

```
3000 CLS
3010 PRINT TAB( 5);"METODO DI VILLARCEAU": PRINT : PRINT
3020 INPUT "A=";A
3030 INPUT "B=";B
3040 INPUT "N=";N
3050 H = (B - A) / 4 / N
3060 X = A:T = 7 * FN F(A)
3070 FOR I = 1 TO N
3080 X = X + H:T = T + 32 * FN F(X)
3090 X = X + H:T = T + 12 * FN F(X)
3100 X = X + H:T = T + 32 * FN F(X)
3110 X = X + H:T = T + 14 * FN F(X)
3120 NEXT I
3130 T = T - 7 * FN F(X)
3140 T = 2 * H * T / 45
3150 PRINT : PRINT "L'INTEGRALE VALE:";T
3160 PRINT : INPUT "VOLETE RIUTILIZZARE IL PROGRAMMA:" ;Z$
3170 IF Z$ = "S" THEN 3000
```

ESEMPI COMMENTATI

Esempio 1:

Si debba calcolare l'integrale:

$$\int_1^{12} x \sin^2 x \, dx$$

A=1

B=12

N=50

L'integrale vale: 38.5890188

Volete riutilizzare il programma?:N

Il risultato é calcolato con una precisione di circa 10^{-7}
con 50 intervalli quando ne occorrevano 1000 con il metodo del trapezio.

Esempio 2:

```
50 DEF FN F(X) = X 14-8 * X 11+ 3 * X 3
```

A=1

B=2

N=15

L'integrale vale: -534.283331

Volete riutilizzare il programma?:S

A=1

B=2

N=25

L'integrale vale: -534.283346

Volete riutilizzare il programma?:N

L'integrale é calcolata con una precisione dicirca $2 \cdot 10^{-6}$
con solamente 15 passi d'integrazione mentre la precisio-
ne diminuisce a $13 \cdot 10^{-6}$ con 25 passi:gli errori numerici
hanno quindi il sopravvento su l'errore di metodo.

CONCLUSIONE SUI METODI DI COTES

Esistono molte altre formule di Cotes (in effetti potrebbero essere infinite) che danno l'approssimazione di ordine h^n con $n > 6$.

Tuttavia gli errori numerici dovuti a questi metodi possono annullare la precisione supplementare che essi hanno. S'impiegheranno in generale una ventina di intervalli con il metodo Villarceay, e un centinaio di intervalli con gli altri metodi; questi valori rappresentano un buon compromesso tra gli errori del metodo, gli errori numerici e la rapidità.

Le formule di ordine superiore a 6 sono generalmente poco utilizzate e a loro si preferisce il metodo di Romberg.

METODO DI ROMBERG

La funzione da integrare deve essere definita alla
linea 50 del programma:

```
50 DEF FN F(X)= LOG( 1+TAN(X))
```

Successivamente occorre fornire al programma i valori a e b degli estremi dell'intervallo d'integrazione e la precisione desiderata sottoforma di un numero p compreso fra 1 e 8 (la precisione corrispondente è allora dell'ordine di 10^{-p}).

```
5000 CLS
5010 PRINT TAB( 5);"METODO DI ROMBERG": PRINT : PRINT
5020 INPUT "A=";A
5030 INPUT "B=";B
5040 INPUT "PRECISIONE (DA 1 A 8):";E:E = 10 ^ ( - E)
5050 N = 1:T(0,0) = (B - A) * ( FN F(A) + FN F(B)) / 2
5060 H = (B - A) / (2 ^ N):X = A
5070 T(0,N) = ( FN F(B) + FN F(A)) / 2
5080 FOR I = 1 TO (2 ^ N) - 1
5090 X = X + H:T(0,N) = T(0,N) + FN F(X)
5100 NEXT I
5110 T(0,N) = T(0,N) * H
5120 FOR P = 1 TO N
5130 K = N - P
5140 T(P,K) = ((4 ^ P) * T(P - 1,K + 1) - T(P - 1,K)) / ((4 ^ P) - 1)
5150 NEXT P
5160 IF ABS (T(N,0) - T(N - 1,0)) < E THEN 5190
5170 IF N < 9 THEN N = N + 1: GOTO 5060
5180 PRINT : PRINT "LA PRECISIONE NON PUO' ESSERE CHE 1E";1 + INT ( LOG(A
N,0)-T(N-1,0))/LOG(10))
5190 PRINT : PRINT "L'INTEGRALE VALE:";T(N,0)
5200 PRINT : INPUT "VOLETE RIUTILIZZARE IL PROGRAMMA:" ;Z#
5210 IF Z# = "S" THEN 5000
```

ESEMPIO COMMENTATO

A=1

B=12

Precisione (da 1 a 8):7

L'integrale vale: 38.5890187

Volete riutilizzare il programma?:N

Il valore con un'approssimazione di 10^{-7} dell'integrale:

$$\int_1^{12} \sin^2 x \, dx$$

é ottenuto abbastanza rapidamente, mentre occorre-
vano 1000 intervalli con il metodo dei trapezi.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI SU PERSONAL COMPUTER

METODO DI RUNGE-KUTTA

La funzione deve essere inserita nel programma a partire dalla linea 2800 sotto la forma:

2800 F=4*Y+X

ove Y rappresenta la funzione e X la variabile.

Una volta lanciato, il programma chiede:

il punto iniziale (x_0, y_0),

il secondo limite dell'intervallo di studio X ,

il numero dei punti da stampare n;

la finezza m.

La finezza é un metodo per aumentare la precisione del calcolo. La precisione é naturalmente legata al numero dei termini calcolato.

Per usufruire di una migliore precisione senza tuttavia saturare lo schermo di risultati inutili, viene

stampata soltanto una parte dei punti calcolata.

La finezza rappresenta allora il numero dei punti calcolati fra due punti stampati. Per una finezza di 5, per esempio, il programma calcolerà un numero di punti maggiori di quelli che stamperà. Se viceversa si desidera che tutti i punti calcolati siano stampati basterà richiedere una finezza di 1.

```
1000 CLS
1010 PRINT TAB( 5);"Y'=F(X,Y) METODO DI RUNGE-KUTTA": PRINT : PRINT
1020 PRINT "1- PROGRAMMAZIONE DELL'EQUAZIONE": PRINT
1030 PRINT "2- RISOLUZIONE": PRINT : PRINT
1040 INPUT "FUNZIONE RICHIESTA:";E: PRINT
1050 IF E = 1 THEN LIST 2800 - 2890: END
1060 INPUT "X0=";X
1070 INPUT "Y0=";Z
1080 INPUT "SECONDO ESTREMO:";XF
1090 INPUT "NUMERO DI PUNTI:";M
1100 INPUT "FINEZZA:";FI: PRINT
1110 X1 = X
1120 H = (XF - X) / FI / M
1130 FOR I = 1 TO M
1140 FOR J = 1 TO FI
1150 X = X1 + ((I - 1) * FI + J - 1) * H
1160 GOSUB 2500
1170 NEXT J
1180 PRINT "X=";X; TAB( 20);"Y=";Z
1190 NEXT I
1200 PRINT : INPUT "VOLETE RIUTILIZZARE IL PROGRAMMA:";Z$
1210 IF Z$ = "S" THEN 1000
2500 XX = X;Y = Z: GOSUB 2800:A = H * F
2510 X = X + H / 2;Y = Z + A / 2: GOSUB 2800:B = H * F
2520 Y = Z + B / 2: GOSUB 2800:C = H * F
2530 X = XX + H;Y = Z + C: GOSUB 2800
2540 Z = Z + (A + 2 * B + 2 * C + H * F) / 6
2550 RETURN
2800 F = - Y * Y
2890 RETURN
```

ESEMPIO COMMENTATO

L'equazione studiata é la seguente:

$$y' = -y^2 \quad \text{con } y(1) = 1$$

La soluzione esatta é:

$$y = 1/x$$

2800 F=-Y*Y

Xo = 1

Yo = 1

Secondo estremo : 10

Numero di punti: 9

Finezza : 10

X=2	Y=.500000298
X=3	Y=.333333479
X=4	Y=.250000084
X=5	Y=.200000054
X=6	Y=.166666704
X=7	Y=.142857171
X=8	Y=.125000021
X=9	Y=.111111128
X=10	Y=.100000014

Volete riutilizzare il programma?:S

Xo=1

Yo=1

Secondo estremo: 10

Numero di punti: 9

Finezza : 50

X=2	Y=.5
X=3	Y=.333333334
X=4	Y=.25
X=5	Y.2
X=6	Y=.166666666
X=7	Y=.142857143
X=8	Y=.125
X=9	Y=.111111111
X=10	Y=.1

Volete riutilizzare il programma?:N

I risultati sono ancora soddisfacenti con una finezza di
10 e sono esatti con una finezza di 50.

METODO PREDITTORE-CORRETTORE

L'impiego di questo programma é del tutto simile a quello del precedente programma.

```
2010 PRINT TAB( 5);"PREDITTORE-CORRETTORE": PRIN1 : PRIN1
2020 PRINT "1- PROGRAMMAZIONE DELL'EQUAZIONE": PRINT
2030 PRINT "2- RISOLUZIONE": PRINT : PRINT
2040 INPUT "FUNZIONE RICHIESTA:";E: PRINT
2050 IF E = 1 THEN LIST 2800 - 2890: END
2060 INPUT "X0=";X
2070 INPUT "Y0=";Z
2080 INPUT "SECONDO ESTREMO XF:";XF
2090 INPUT "NUMERO DI PUNTI: ";M
2100 INPUT "FINEZZA:";FI: PRINT
2110 H = (XF - X) / FI / M
2120 K = 0:X1 = X
2130 Y = Z: GOSUB 2800:P(3) = F
2140 FOR I = 1 TO M
2150 FOR J = 1 TO FI
2160 K = K + 1:X = X1 + ((I - 1) * FI + J - 1) * H
2170 IF K < 4 THEN GOSUB 2500:Y = Z: GOSUB 2800:P(3 - K)
    = F: GOTO 225 0
2180 X = X + H
2190 Y = Z + H / 24 * (55 * P(0) - 59 * P(1) + 37 * P(2)
    - 9 * P(3))
2200 GOSUB 2800
2210 W = Z + H / 24 * (9 * F + 19 * P(0) - 5 * P(1) + P(2))
2220 IF ABS (Y - W) > 1E - 8 THEN Y = W: GOTO 2200
```

```
2230 Z = W:P(3) = P(2):P(2) = P(1):P(1) = P(0)
2240 Y = Z: GOSUB 2800:P(0) = F
2250 NEXT J
2260 PRINT "X=";X; TAB( 20);"Y=";Z
2270 NEXT I
2280 PRINT : INPUT "VOLETE RIUTILIZZARE IL PROGRAMMA?:";Z$
2290 IF Z$ = "S" THEN 2000
2300 GOTO 100
2500 XX = X:Y = Z: GOSUB 2800:A = H * F
2510 X = X + H / 2:Y = Z + A / 2: GOSUB 2800:B = H * F
2520 Y = Z + B / 2: GOSUB 2800:C = H * F
2530 X = XX + H:Y = Z + C: GOSUB 2800
2540 Z = Z + (A + 2 * B + 2 * C + H * F) / 6
2550 RETURN
2800 F = - Y * Y
2890 RETURN
```

ESEMPIO COMMENTATO

In alcuni casi il metodo predittore-correttore dà risultati migliori rispetto al metodo di Runge-Kutta.

Viceversa nel caso qui sotto si produce il fenomeno inverso.

Riprendiamo l'equazione:

$$y' = -y^2 \quad \text{con } y(1) = 1$$

La cui soluzione esatta é $y = 1/x$.

2800 F=-Y*Y

Predittore-correttore

Xo=1

Yo=1

Secondo estremo :10

Numero di punti:9

Finezza: 10

X=2	Y=.499988002
X=3	Y=.333326726
X=4	Y=.249996121
X=5	Y=.199997481
X=6	Y=.166664907
X=7	Y=.142855845
X=8	Y=.124999005
X=9	Y=.111110324
X=10	Y=.0999993618

volete riutilizzare il programma?:S

Xo = 1

Yo = 1

Secondo estremo X F: 10

Numero di punti: 9

Finezza : 50

X=2	Y=.499999967
X=3	Y=.333333317
X=4	Y=.24999999
X=5	Y=.199999994
X=6	Y=.166666662
X=7	Y=.14285714
X=8	Y=.124999997
X=9	Y=.111111109
X=10	Y=.0999999984

Volete riutilizzare il programma?:N

La precisione é questa volta migliore con il metodo di
Runge-Kutta.