

APPUNTI DI MATEMATICA
DI
Antonino Giardina

A **Luigi**, mio Padre
Senza la Tua vita spesa per me,
io non sarei stato ciò che sono.
Grazie Papà

Prefazione

Questi *Appunti di Matematica* sono pensati per studenti liceali interessati a proseguire gli studi in ambiti scientifici come Matematica, Fisica, Ingegneria o Astronomia. L'opera, articolata in undici unità, guida lo studente in modo progressivo dai concetti di continuità al teorema fondamentale del calcolo integrale, con un equilibrio tra rigore teorico e intuizione geometrica.

La scelta di redigere questi appunti nasce dalla consapevolezza che nei corsi universitari manca spesso il tempo per spiegare in modo dettagliato i passaggi logici e tecnici. Per questo, è utile iniziare già al liceo a costruire basi solide con spiegazioni chiare ed essenziali.

L'appendice propone una trattazione teorica degli insiemi numerici: dai reali (introdotti assiomaticamente) ai naturali, interi, razionali, irrazionali e complessi, con alcune prime dimostrazioni — tra cui l'esistenza e unicità della radice quadrata per ogni reale positivo — e un'introduzione alle principali strutture algebriche. Si mostra inoltre che i naturali costruiti a ritroso dai reali coincidono con quelli assiomatici di Peano.

Questi appunti non intendono sostituire né i testi universitari né i manuali scolastici, ma fungere da ponte tra i due: uno strumento agile e coerente per ripassare, chiarire e approfondire i concetti fondamentali.

Dedico spontaneamente quest'opera a mio padre, scomparso nell'aprile del 2005, anno del mio ingresso di ruolo nell'insegnamento. Questo lavoro è per me un modo di restituire quanto ricevuto e trasmettere l'amore per la matematica.

A chi leggerà con impegno, l'augurio di scoprire in queste pagine non solo strumenti di studio, ma anche la bellezza del pensiero matematico.

Antonino Giardina
Ottobre 2005

APPUNTI DI MATEMATICA
DI
Antonino Giardina

A **Luigi**, mio Padre
Senza la Tua vita spesa per me,
io non sarei stato ciò che sono.
Grazie Papà

INDICE

Unità 1 FUNZIONI CONTINUE: DEFINIZIONE	pag. 2
Unità 2 FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE REALE: NOZIONE DI LIMITI	pag. 3
Unità 3 INFINITESIMI ED INFINITI.....	pag. 5
Unità 4 DEFINIZIONE DI DERIVATA	pag. 8
Unità 5 DIFFERENZIALE DI UNA FUNZIONE	pag. 10
Unità 6 SIGNIFICATO GEOMETRICO DI: DERIVATA E DIFFERENZIALE	pag. 13
Unità 7 FORMULA DI TAYLOR	pag. 18
Unità 8 L'INTEGRALE SECONDO RIEMANN	pag. 21
Unità 9 INTEGRABILITÀ' DELLE FUNZIONI CONTINUE A TRATTI	pag. 31
Unità 10 TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE	pag. 33
Unità 11 APPENDICE SUGLI INSIEMI NUMERICI	pag. 35
• I NUMERI REALI PER VIA ASSIOMATICA	pag. 36
• RETTA REALE ESTESA	pag. 37
• I NUMERI NATURALI SECONDO GIUSEPPE PEANO	pag. 37
• I NUMERI NATURALI COME SOTTOINSIEME INDUTTIVO DEI REALI ...	pag. 38
• NUMERI INTERI RELATIVI E NUMERI RAZIONALI	pag. 38
• NUMERI IRRAZIONALI	pag. 39
• LA RADICE QUADRATA DI 2 NON APPARTIENE AI REALI	pag. 39
• ESISTENZA DELLA RADICE QUADRATA NEI REALI	pag. 40
• I NUMERI COMPLESSI	pag. 41
• OMOMORFISMI – ISOMORFISMI	pag. 43

UNITA' 1

FUNZIONI CONTINUE

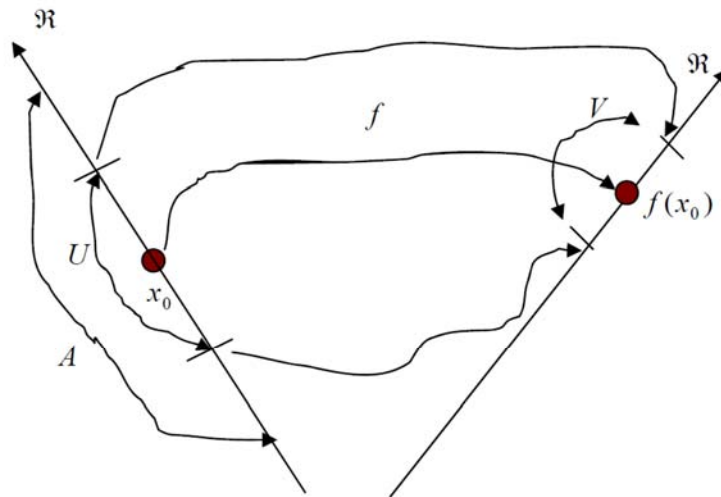
DEFINIZIONE

Per esprimere in maniera intuitiva che un'applicazione $f : A \rightarrow \mathfrak{R}$ ($A \subseteq \mathfrak{R}$), è **continua nel punto** $x_0 \in A$, diciamo che $f(x)$ è arbitrariamente “vicino” a $f(x_0)$ a patto di prendere x sufficientemente “vicino” a x_0 .

Ammettendo che la nozione matematica di “intorno” corrisponde alla nozione intuitiva di “vicinanza”, siamo allora condotti alla seguente:

Definizione - Sia $f : A \rightarrow \mathfrak{R}$ un'applicazione ($A \subseteq \mathfrak{R}$) e $x_0 \in A$.

L'applicazione f si dice continua nel punto x_0 , se, per ogni intorno V di $f(x_0)$ in $\mathfrak{R}$, esiste un intorno U di x_0 in A tale che $f(U) \subseteq V$. In simboli: $\forall V(f(x_0)) \exists U(x_0) : f(U) \subseteq V$



In termini di “ ε e δ ” si ha: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

UNITA' 2

FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE REALE

NOZIONE DI LIMITE

Definizione - Siano $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale di una variabile reale ($A \subseteq \mathbb{R}$), $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione⁽¹⁾ per A , L un numero reale; diciamo che la funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ **converge** al numero reale L (o anche che **ammette limite** L) per x tendente ad x_0 in A e scriviamo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L,$$

da leggersi “limite per x tendente ad x_0 di effe di x uguale ad L ”, se la funzione

$$f^* : A \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

così definita:

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per } x \in A - \{x_0\} \\ L & \text{per } x = x_0 \end{cases}$$

risulta essere continua⁽²⁾ in x_0 .

Osservazione:

E' bene notare che si può presentare una delle seguenti eventualità: $x_0 \in A$ aut $x_0 \notin A$, ossia $\exists f(x_0)$ aut non esiste $f(x_0)$; ai fini del limite per x tendente ad x_0 , il presentarsi dell'una o dell'altra eventualità non comporta alcuna differenza; inoltre se $\exists f(x_0)$ e se esiste il $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, non è detto che sia $f(x_0) = L$, anzi in generale risulta $f(x_0) \neq L$, ancora può benissimo accadere che esista il $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ e non $f(x_0)$ o viceversa.

⁽¹⁾ Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$; diciamo che x_0 è un **punto di accumulazione** per A , se comunque prendiamo un intorno di x_0 , esiste almeno un punto diverso da x_0 che appartiene sia a questo intorno sia ad A . In simboli: $\forall \delta > 0 \Rightarrow]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap A - \{x_0\} \neq \emptyset$. Si noti che un punto può essere di accumulazione pur non appartenendo ad A , e di contro, pur appartenendo all'insieme può non essere di accumulazione, evidentemente può appartenere ed essere di acc. e può non appartenere e non essere di acc..

⁽²⁾ Siano $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale di una variabile reale ($A \subseteq \mathbb{R}$) e $x_0 \in A$ si ha:

f è continua in $x_0 \stackrel{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Teorema - Siano $f : A \rightarrow \mathfrak{R}$ una funzione reale di una variabile reale ($A \subseteq \mathfrak{R}$), $x_0 \in A$ un punto di accumulazione per A ; condizione necessaria e sufficiente affinché $f : A \rightarrow \mathfrak{R}$ sia continua in x_0 è che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Osservazione:

Pertanto la nozione di limite per x tendente ad x_0 , da qualche informazione utile quando la funzione non è continua in x_0 oppure quando non è definita in tale punto.

Teorema - Siano $f : A \rightarrow \mathfrak{R}$ una funzione reale di una variabile reale ($A \subseteq \mathfrak{R}$), $x_0 \in \mathfrak{R}$ un punto di accumulazione per A ; condizione necessaria e sufficiente affinché $f : A \rightarrow \mathfrak{R}$ converga ad un numero reale L , per x tendente ad x_0 in A , è che:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Dim.: ovvia a partire dalla definizione di funzione continua in un punto.

Teorema - Siano $f : A \rightarrow \mathfrak{R}$ una funzione reale di una variabile reale ($A \subseteq \mathfrak{R}$), $x_0 \in \mathfrak{R}$ un punto di accumulazione per A ; condizione necessaria e sufficiente affinché $f : A \rightarrow \mathfrak{R}$ converga ad un numero reale L , per x tendente ad x_0 in A , è che:

$$\forall V(L) \exists U(x_0) \quad f(U \cap A - \{x_0\}) \subseteq V$$

con $V(L)$ intorno di L in $\mathfrak{R}$ e $U(x_0)$ intorno di x_0 in A .

Osservazione: la caratterizzazione di cui al presente teorema, opportunamente adattata, costituisce la “base” per dare la cosiddetta **definizione unificatrice di limite**, infatti si ha la seguente:

Definizione - (definizione unificatrice) Siano $f : A \rightarrow \mathfrak{R}$ una funzione reale di una variabile reale ($A \subseteq \mathfrak{R}$), $x_0 \in \overline{\mathfrak{R}}$ un punto di accumulazione per A , $L \in \overline{\mathfrak{R}}$; diciamo che il limite per x tendente ad x_0 in A di $f(x)$ è L se:

$$\forall V(L) \exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap A - \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V(L).$$

Teorema - Siano $f : A \rightarrow \mathfrak{R}$ una funzione reale di una variabile reale ($A \subseteq \mathfrak{R}$), $x_0 \in \mathfrak{R}$ un punto di accumulazione per A ; condizione necessaria e sufficiente affinché $f : A \rightarrow \mathfrak{R}$ converga ad un numero reale L , per x tendente ad x_0 in A , è che:

per ogni successione $\{x_n\}$ di punti di A convergente ad x_0 , la successione $\{f(x_n)\}$ di punti di $\mathfrak{R}$ converga ad L .

UNITA' 3

INFINITESIMI ED INFINITI

Siano $f, g : A \rightarrow \mathfrak{R}$ due funzioni reali di una variabile reale ($A \subseteq \mathfrak{R}$) e $x_0 \in \mathfrak{R}$ un punto di accumulazione per A , se f e g sono infinitesimi per $x \rightarrow x_0$, cioè se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0.$$

Diamo la seguente:

2.1 Definizione - La funzione f si dice **infinitesima di ordine superiore** rispetto a g , per $x \rightarrow x_0$, se esiste un intorno $U(x_0)$ ed una funzione $h : U \cap A - \{x_0\} \rightarrow \mathfrak{R}$, tali che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 0$$

$$x \in U \cap A - \{x_0\} \Rightarrow f(x) = g(x) \cdot h(x).$$

In questo caso si scrive $f(x) = og(x)$ per $x \rightarrow x_0$ o anche $f = og$.

2.2 Definizione - Le funzioni f e g si dicono **infinitesimi dello stesso ordine**, per $x \rightarrow x_0$, se esiste $k \in \mathfrak{R} - \{0\}$, un intorno $U(x_0)$ e una funzione $h : U \cap A - \{x_0\} \rightarrow \mathfrak{R}$, tali che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 0$$

$$x \in U \cap A - \{x_0\} \Rightarrow f(x) = g(x) \cdot \{k + h(x)\}.$$

Nell'ipotesi che f e g siano diverse da zero in un intorno di x_0 valgono i seguenti risultati:

2.3 Teorema- C.N. e S. affinché f sia infinitesima di ordine superiore rispetto a g , per $x \rightarrow x_0$,

è che la funzione $\frac{f}{g}$, che è definita in un intorno di x_0 , sia infinitesima per $x \rightarrow x_0$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

2.4 Teorema- C.N. e S. affinché f e g siano infinitesimi dello stesso ordine, per $x \rightarrow x_0$,

è che la funzione $\frac{f}{g}$, che è definita in un intorno di x_0 , ammetta limite finito diverso da zero per $x \rightarrow x_0$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \quad k \in \mathfrak{R} - \{0\}.$$

Siano $f, g : A \rightarrow \mathfrak{R}$ due funzioni reali di una variabile reale ($A \subseteq \mathfrak{R}$) infinitesimi per $x \rightarrow x_0$, e sia $\alpha \in \mathfrak{R}_+^*$. Supponiamo che in un intorno $U(x_0)$, con $U \subseteq A$, sia definita la funzione $\varphi : U - \{x_0\} \rightarrow \mathfrak{R}$:

$$\varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} [g(x)]^\alpha.$$

Si ha la seguente:

2.5 Definizione- La funzione f si dice **infinitesima di ordine α rispetto a g** , per $x \rightarrow x_0$, se le funzioni f e $\varphi = g^\alpha$ sono infinitesimi dello stesso ordine, per $x \rightarrow x_0$. In tal caso deve esistere $k \in \mathfrak{R} - \{0\}$ un intorno $U'(x_0)$ e una funzione $h : U' \cap U - \{x_0\} \rightarrow \mathfrak{R}$, tali che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 0$$

$$x \in U' \cap U - \{x_0\} \Rightarrow f(x) = [g(x)]^\alpha \{k + h(x)\}.$$

Si dice allora che kg^α è la **parte principale** dell'infinitesimo f rispetto all'infinitesimo g per $x \rightarrow x_0$.

Siano $f, g : A \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}$ due funzioni reali di una variabile reale ($A \subseteq \mathfrak{R}$) e $x_0 \in \mathfrak{R}$ un punto di accumulazione per A le quali sono divergenti per $x \rightarrow x_0$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty.$$

2.6 Definizione - La funzione f si dice **infinita di ordine inferiore** rispetto a g (g infinita di ordine superiore rispetto a f), per $x \rightarrow x_0$, se esiste un intorno $U(x_0)$ ed una funzione $h : U \cap A - \{x_0\} \rightarrow \mathfrak{R}$, tali che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 0$$

$$x \in U \cap A - \{x_0\} \Rightarrow f(x) = g(x) \cdot h(x).$$

In questo caso si scrive $g(x) = Of(x)$ per $x \rightarrow x_0$.

2.7 Definizione - Le funzioni f e g si dicono **infiniti dello stesso ordine**, per $x \rightarrow x_0$, se esiste $k \in \mathfrak{R} - \{0\}$, un intorno $U(x_0)$ e una funzione $h : U \cap A - \{x_0\} \rightarrow \mathfrak{R}$, tali che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 0$$

$$x \in U \cap A - \{x_0\} \Rightarrow f(x) = g(x) \cdot \{k + h(x)\}.$$

Tenuto conto che f e g siano diverse da zero in un intorno di x_0 valgono i seguenti risultati:

2.8 Teorema- C.N. e S. affinché f sia infinita di ordine inferiore rispetto a g , per $x \rightarrow x_0$, è che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad \text{o anche} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{g(x)}{f(x)} \right| = \infty.$$

2.9 Teorema- C.N. e S. affinché f e g siano infiniti dello stesso ordine, per $x \rightarrow x_0$, è che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \quad k \in \mathfrak{R} - \{x_0\}.$$

Siano $f, g : A \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}$ due infiniti per $x \rightarrow x_0$, e sia $\alpha \in \mathfrak{R}_+^*$. Supponiamo che in un intorno $U(x_0)$, con $U \subseteq A$, sia definita la funzione $\varphi : U - \{x_0\} \rightarrow \mathfrak{R}$:

$$\varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} [g(x)]^\alpha.$$

Si ha il seguente:

2.10 Definizione- La funzione f si dice **infinita di ordine α rispetto a g** , per $x \rightarrow x_0$, se le funzioni f e $\varphi = g^\alpha$ sono infiniti dello stesso ordine, per $x \rightarrow x_0$. In tal caso deve esistere $k \in \mathfrak{R} - \{0\}$ un intorno $U'(x_0)$ e una funzione $h : U' \cap U - \{x_0\} \rightarrow \mathfrak{R}$, tali che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 0$$

$$x \in U' \cap U - \{x_0\} \Rightarrow f(x) = [g(x)]^\alpha \{k + h(x)\}.$$

Si dice allora che kg^α è la **parte principale** dell'infinito f rispetto all'infinito g per $x \rightarrow x_0$.

Esercizi

1. Siano $f, g, h : A \rightarrow \mathfrak{R}$ infinitesimi per $x \rightarrow x_0$. Si dimostri che

$$(i) \quad f = o(g) \wedge g = o(h) \Rightarrow f = o(h) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

$$(ii) \quad f = o(h) \wedge g = o(h) \Rightarrow f + g = o(h) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

$$(iii) \quad f = o(h) \wedge g = o(h) \Rightarrow f \cdot g = o(h) \quad \text{per } x \rightarrow x_0.$$

2. Siano $f, g, h, k : A \rightarrow \mathfrak{R}$ infinitesimi per $x \rightarrow x_0$. Supponendo che $f, g, f + h, g + k$ siano diverse da zero in un intorno di x_0 , si dimostri che

$$h = o(f) \wedge k = o(g) \Rightarrow \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + h(x)}{g(x) + k(x)} = \lambda \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda, \lambda \in \overline{\mathfrak{R}} \right).$$

UNITA' 4

DEFINIZIONE DI DERIVATA

1.1 **Definizione** - Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale definita nell'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e sia x_0 interno ad I . Preso arbitrariamente $x \in I - \{x_0\}$, consideriamo la funzione $r: I - \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$, definita da:

$$r(x_0, x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

essa viene detta rapporto incrementale della f in x_0 relativamente all'incremento $x - x_0$ della variabile indipendente. Se esiste finito il

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

si dice che f è **derivabile** in x_0 ; tale limite viene chiamato **derivata** di f in x_0 e si indica con una delle seguenti notazioni:

$$f'(x_0), (Df)(x_0), \left(\frac{df}{dx} \right)_{x_0}, \dot{f}(x_0).$$

Se si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \quad (\text{risp. } -\infty)$$

Allora si dice che f ha derivata $+\infty$ (risp. $-\infty$) nel punto x_0 .

1.2 **Definizione** - In qualche caso in cui non esiste oppure non può essere considerato il limite del rapporto incrementale per $x \rightarrow x_0$, ad esempio quando x_0 è un estremo di I , può capitare che esista, il limite di esso per $x \rightarrow x_0^+$ (risp. $x \rightarrow x_0^-$). Si dice allora che esiste la **derivata destra** (risp. **sinistra**) di f in x_0 e si scrive:

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}; \quad f'_s(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Evidentemente se esiste $f'(x_0)$ esistono anche $f'_d(x_0)$ ed $f'_s(x_0)$ e si ha: $f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$.

Osservazione su alcune notazioni: se si pone $\Delta x = x - x_0$ e $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ si ha: $r(x_0, \Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

e quindi: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$; ancora se si pone $x = x_0 + h$ si ha: $r(x_0, h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ e quindi:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

1.3 **Definizione** - Se f è derivabile in ogni punto di I si dice che **f è derivabile in I** . In questo caso, per ogni $x \in I$, esiste il corrispondente valore $f'(x)$ della derivata della funzione f nel punto x , resta così definita in I una “nuova” funzione che indichiamo con $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ alla quale si dà il nome di **funzione derivata prima** (o semplicemente derivata) di f .

1.4 **Definizione** - Se $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in I$ si dice che la funzione f è **due volte derivabile** (o anche che ammette **derivata seconda**) in x_0 e tale derivata seconda si indica con una delle seguenti notazioni:

$$f''(x_0), (D^2 f)(x_0), \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right)_{x_0}, \ddot{f}(x_0).$$

Se f' è derivabile in ogni punto di I si dice che **f è due volte derivabile in I** . In questo caso, per ogni $x \in I$, esiste il corrispondente valore $f''(x)$ della derivata seconda della funzione f nel punto x , resta così definita in I una “nuova” funzione che indichiamo con $f'' : I \rightarrow \mathbb{R}$ alla quale si dà il nome di **funzione derivata seconda** (o semplicemente derivata seconda o del secondo ordine) di f .

Se $f'' : I \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in I$ si dice che la funzione f è **tre volte derivabile** (o anche che ammette **derivata terza**) in x_0 e tale derivata terza si indica con una delle seguenti notazioni:

$$f'''(x_0), (D^3 f)(x_0), \left(\frac{d^3 f}{dx^3} \right)_{x_0}, \dddot{f}(x_0).$$

Se f'' è derivabile in ogni punto di I si dice che **f è tre volte derivabile in I** . In questo caso, per ogni $x \in I$, esiste il corrispondente valore $f'''(x)$ della derivata terza della funzione f nel punto x , resta così definita in I una “nuova” funzione che indichiamo con $f''' : I \rightarrow \mathbb{R}$ alla quale si dà il nome di **funzione derivata terza** (o semplicemente derivata terza o del terzo ordine) di f .

Così proseguendo, se $k \in \mathbb{N}$, può accadere che f sia k volte derivabile (o anche che ammette derivata d'ordine k) in x_0 ; tale derivata si indica con una delle seguenti notazioni:

$$f^{(k)}(x_0), (D^k f)(x_0), \left(\frac{d^k f}{dx^k} \right)_{x_0}.$$

Per uniformità di notazione è spesso conveniente porre:

$$f^0(x) = (D^0 f)(x) = f(x), \quad \forall x \in I.$$

UNITA' 5

DIFFERENZIALE DI UNA FUNZIONE

1.1 Definizione - Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale di una variabile reale definita in un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$. Si dice che f è **differenziabile** in $x_0 \in I$ se esiste un'applicazione lineare⁽¹⁾ $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (dipendente da x_0) tale che la funzione:

$$\tau(x_0, \cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}$$

Definita da

$$\tau(x_0, x) = f(x) - f(x_0) - L(x_0, x - x_0)$$

risulti infinitesima di ordine superiore⁽²⁾ a $x - x_0$ per $x \rightarrow x_0$ in I ; cioè tale che

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - L(x_0, x - x_0)}{x - x_0} = 0, \quad x \in I - \{x_0\}.$$

L'applicazione L così individuata si dice **differenziale** della funzione f nel punto x_0 e si indica con il simbolo $df(x_0)$.

Se f è differenziabile in ogni punto $x_0 \in I$, si dice che **f è differenziale** in I .

Vale il seguente risultato:

1.2 Teorema - Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale di una variabile reale definita in un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$. Condizione necessaria e sufficiente affinché f sia differenziabile in $x_0 \in I$ è che sia derivabile in x_0 . In tal caso

$$(2) \quad df(x_0)(x) = f'(x_0)x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

⁽¹⁾ Nel nostro corso diamo la seguente:

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è detta lineare se è del tipo: $f(x) = Ax + B$ con A, B numeri reali. In particolare per quanto riguarda l'applicazione in questione, risulta: $L(x_0, x) = f'(x_0)(x)$ ossia: $L(x_0, x - x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

⁽²⁾ Siano $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni reali di una variabile reale ($A \subseteq \mathbb{R}$) e $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per A , se f e g sono infinitesimi per $x \rightarrow x_0$, cioè se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0. \quad \text{Diamo la seguente:}$$

Definizione - La funzione f si dice **infinitesima di ordine superiore** rispetto a g , per $x \rightarrow x_0$, se la funzione $\frac{f}{g} : U(x_0) - \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ con $U(x_0)$ intorno di x_0 , risulta infinitesima per $x \rightarrow x_0$, cioè se:

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Intuitivamente accade che la funzione f , per $x \rightarrow x_0$, "arriva" a zero più velocemente della g .

Dimostrazione: (Teorema 1.2)

Dimostriamo prima la condizione necessaria.

Sia f differenziabile in $x_0 \in I$, allora esiste una costante $A(x_0) \in \mathfrak{R}$ tale che la funzione $\tau(x_0, \cdot): I \rightarrow \mathfrak{R}$ definita da: $\tau(x_0, x) = f(x) - f(x_0) - L(x_0, x - x_0)$ con $L(x_0, x - x_0) = A(x_0)(x - x_0)$ risulti infinitesima di ordine superiore a $x - x_0$, per $x \rightarrow x_0$ in I .

Ne segue che per $x \in I - \{x_0\}$ si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{L(x_0, x - x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tau(x_0, x)}{x - x_0} = A(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tau(x_0, x)}{x - x_0} = A(x_0).$$

Pertanto, f è derivabile in x_0 e si ha:

$$f'(x_0) = A(x_0).$$

Dimostriamo ora la condizione sufficiente.

Cioè supponiamo che f sia derivabile in x_0 . Consideriamo l'applicazione lineare $L(x_0, \cdot): \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ data da

$$L(x_0, x) = f'(x_0)x$$

e la funzione

$$\tau(x_0, \cdot): I \rightarrow \mathfrak{R}$$

Data da:

$$\tau(x_0, x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Allora, per ogni $x \in I - \{x_0\}$ si ha:

$$\frac{\tau(x_0, x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tau(x_0, x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0.$$

Resta così provato che f è differenziabile in x_0 .

Esempio 1. - Si consideri la funzione $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ definita da

$$f(x) = x^3 + 4x$$

derivabile in $\mathfrak{R}$ e si determini

$$df(x_0): \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} \quad \text{per } x_0 = 1.$$

La funzione $f': \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ è data da

$$f'(x) = 3x^2 + 4,$$

pertanto il differenziale $df(x_0): \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ è l'applicazione lineare individuata da:

$$df(x_0)(x) = f'(x_0)x \quad \forall x \in \mathfrak{R}.$$

Si ha, in definitiva, che per $x_0 = 1$ il differenziale è individuato dalla relazione:

$$df(1)(x) = f'(1)x$$

ossia

$$df(1)(x) = 7x, \quad \forall x \in \mathfrak{R} \text{ o se vogliamo} \quad df(1)(x-1) = 7(x-1) = 7x-7 \quad \forall x \in \mathfrak{R}$$

Se consideriamo l'applicazione identica $I : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$

$$I(x) = x,$$

l'applicazione lineare $df(x_0) : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ data dalla (2), si può scrivere:

$$df(x_0) = f'(x_0)I \quad \text{cioè} \quad df(x_0)(x) = f'(x_0)I(x).$$

D'altra parte l'applicazione I è differenziabile in ogni punto $x_0 \in \mathfrak{R}$ e risulta:

$$dI(x_0) = I \quad \text{cioè} \quad dI(x_0)(x) = I(x) \text{ od anche } dI(x) = I.$$

Per tale motivo l'applicazione I viene indicata con il simbolo di differenziale dx ed in accordo con questa notazione, si scrive:

$$df(x) = f'(x)dx.$$

OSSERVAZIONE IMPORTANTE

dall'espressione

$$df(x) = f'(x)dx$$

segue

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx},$$

cioè la derivata prima della funzione f può essere concepita come un rapporto

$$f'(x) \text{ è uguale al rapporto } \frac{df(x)}{dx}$$

tra il differenziale della funzione f ed il differenziale della funzione identica dx .

Inoltre si ha che le regole di differenziazione sono analoghe alle regole di derivazione.

Altre notazioni per indicare il differenziale sono:

$$df(x) = dy(x) = df = dy$$

e quindi:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Così se poniamo $\Delta x = x - x_0$ si ha:

$$df(x_0)(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x \text{ e ancora per } I(x) = x \text{ si ha: } dx = 1\Delta x \text{ ossia:}$$

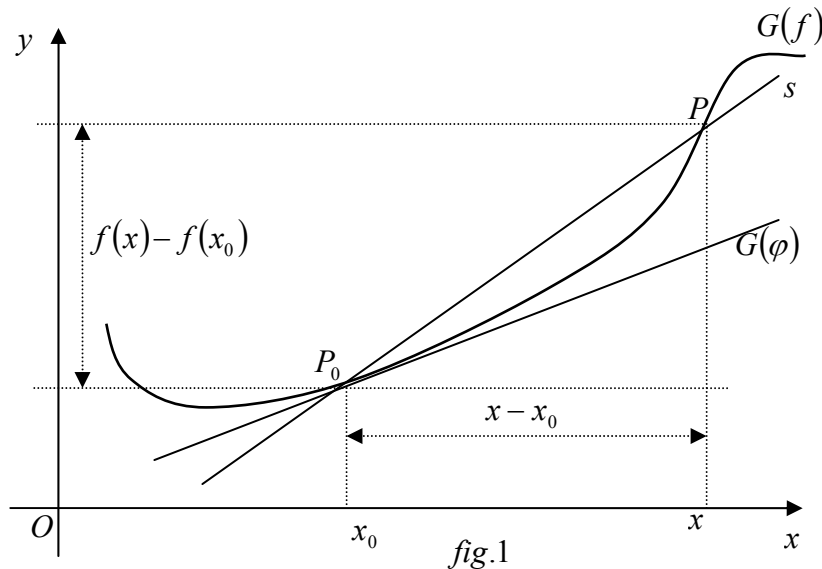
$$dx = \Delta x$$

cioè per questa funzione $I(x) = x$, il differenziale è uguale all'incremento Δx .

UNITA' 6

SIGNIFICATO GEOMETRICO DI: DERIVATA E DIFFERENZIALE

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale di una variabile reale, definita nell'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ ed x_0 un punto interno ad I . Sia $G(f)$ il grafico della f su di un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy (fig. 1)



Siano P_0 e P i due punti di ascissa x_0 ed x . Allora il rapporto

$$r(x_0, x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

rappresenta il coefficiente angolare della retta **secante** il grafico di f nei punti P_0, P .

Se f è derivabile in x_0 , l'espressione

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

rappresenta il coefficiente angolare di una retta passante per il punto $P_0(x_0, f(x_0))$; questa retta si dice **tangente al grafico** di f nel punto di ascissa x_0 .

Tale retta è dunque il grafico $G(\varphi)$ della funzione (lineare) $\varphi(x_0, \cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$(1) \quad \varphi(x_0, x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

La retta $G(\varphi)$ è caratterizzata dalla seguente proprietà:

3.1 Proprietà - $G(\varphi)$ è l'unica retta del piano passante per il punto $P_0(x_0, f(x_0)) \in G(f)$ tale che la funzione

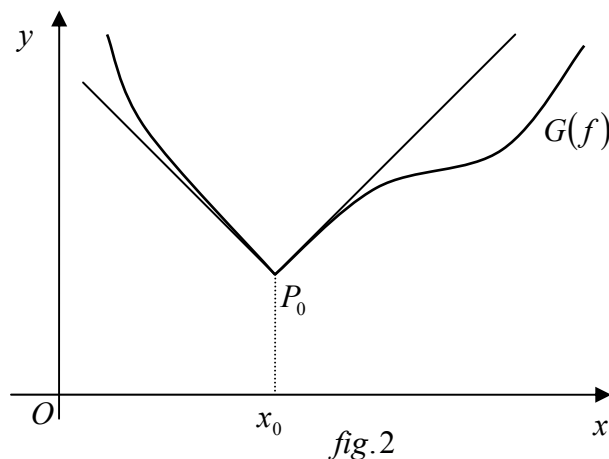
$$\tau(x_0, \cdot) = f - \varphi(x_0, \cdot)$$

sia un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $x - x_0$, per $x \rightarrow x_0$.

Dim.: viene lasciata per esercizio.

Pertanto la derivabilità di f in x_0 rappresenta geometricamente la circostanza che $G(f)$ ha nel punto $(x_0, f(x_0))$, la retta tangente.

Se accade che in x_0 esistono la derivata destra $f'_d(x_0)$ e la derivata sinistra $f'_s(x_0)$ ma non esiste $f'(x_0)$ (fig. 2): si ha che $f'_d(x_0)$ ed $f'_s(x_0)$ rappresentano i coefficienti angolari di due rette passanti per $P_0(x_0, f(x_0))$, e che si dicono rispettivamente **semitangente destra** e **semitangente sinistra** del $G(f)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$.



Riprendiamo l'uguaglianza $\tau(x_0, x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$, che possiamo anche scrivere:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \tau(x_0, x).$$

Si vede che l'incremento della f corrispondente all'incremento $x - x_0$ della variabile indipendente si compone di due parti: la prima,

$$f'(x_0)(x - x_0),$$

è lineare rispetto ad $x - x_0$, e la seconda,

$$\tau(x_0, x),$$

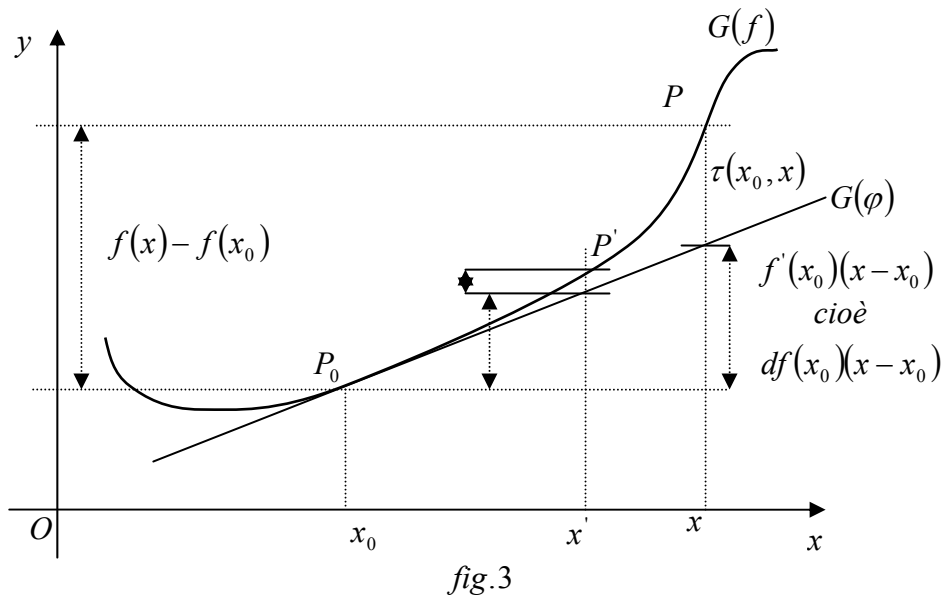
è infinitesima di ordine superiore rispetto ad $x - x_0$ per $x \rightarrow x_0$.

Dal punto di vista geometrico, la prima parte rappresenta l'incremento che subisce l'ordinata del punto che si "muove" sulla tangente alla curva nel punto $(x_0, f(x_0))$, e la seconda rappresenta l'incremento a partire dalla tangente fino al grafico di f (fig. 3).

Pertanto l'incremento della f , corrispondente all'incremento $x - x_0$ della variabile indipendente, in un intorno di x_0 , può essere approssimato con il differenziale della funzione f nel punto x_0 cioè con:

$$df(x_0)(x - x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

commettendo un errore tanto più trascurabile quanto più $x - x_0$ si avvicina a zero, vedasi x' di fig. 3.



Esempio 1.

Data la funzione $f(x) = x^2$, calcoliamo l'incremento Δf e il differenziale df per $x_0 \in \mathfrak{R}$ e Δx arbitrario.

Si ha:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2, \quad df = 2x_0\Delta x,$$

Da cui si ottiene:

$$\tau = \Delta f - df = (\Delta x)^2.$$

Sia ora $x_0 = 30$ e $\Delta x = 0,1$; si ha:

$$\tau = \Delta f - df = 0,01;$$

quindi l'errore commesso sostituendo all'incremento Δf il differenziale df è uguale a 0,01 per un incremento $\Delta x = 0,1$.

Perciò:

$$\Delta f \cong 2x_0\Delta x = 60 \cdot 0,1 = 6.$$

Nel caso in cui l'incremento sia ancora più piccolo, per esempio $\Delta x = 0,01$, si otterrà:

$$\Delta f \cong 2x_0\Delta x = 60 \cdot 0,01 = 0,6,$$

con un errore questa volta di $(\Delta x)^2 = (0,01)^2 = 0,0001$.

Osserviamo inoltre che x_0^2 rappresenta l'area del quadrato di lato x_0 e $(x_0 + \Delta x)^2$ quella del quadrato di lato $x_0 + \Delta x$, l'incremento $\Delta f = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2$ rappresenta l'area tratteggiata in figura 4, il differenziale $df = 2x_0\Delta x$ rappresenta l'area tratteggiata in figura 5 e $\tau = \Delta f - df$ rappresenta l'area tratteggiata in figura 6

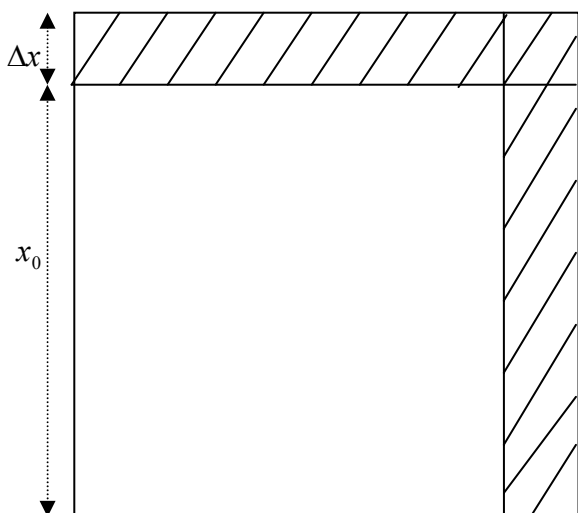


fig.4

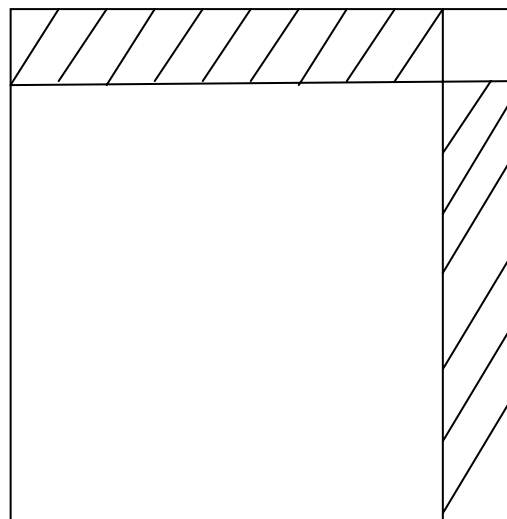


fig.5

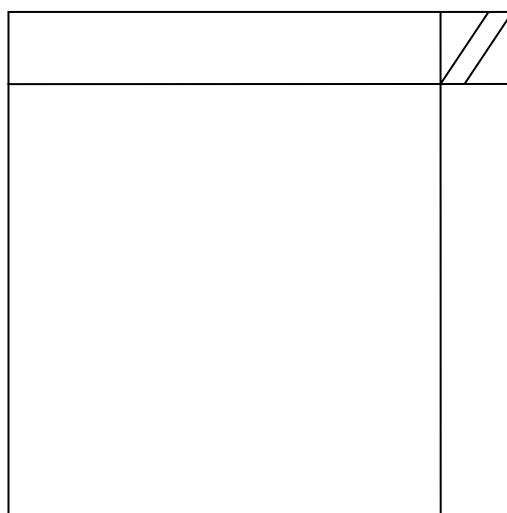


fig.6

Esercizi

1. Sia $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che la retta grafico della funzione $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\varphi(x) = mx + q, \quad m, q \in \mathbb{R}$$

è un **asintoto** per f se

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0.$$

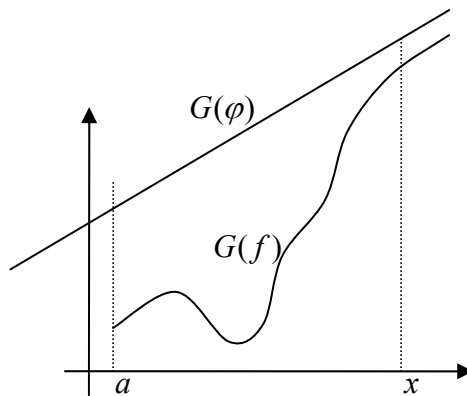
Si dimostri che, C.N. e S. affinché valga la (1) è che

$$(2) \quad m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x},$$

$$(3) \quad q = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx]$$

Inoltre, se f è derivabile, C. S. per la (2) è che risulti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = m.$$



2. Si mostri che la retta tangente al grafico $G(f)$ della funzione

$$f : [-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sqrt{x+1}$$

nel punto $(0,1)$, è il grafico $G(\varphi)$ della funzione

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}x + 1.$$

UNITA' 7

FORMULA DI TAYLOR

Se una funzione reale f è definita in un intorno $U \subseteq \mathfrak{R}$ di un punto $x_0 \in \mathfrak{R}$ ed è derivabile in x_0 , allora esiste un unico polinomio di primo grado (unità 3)

$$P_1(x_0, x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

tale che posto $R_1(x_0, x) = f(x) - P_1(x_0, x)$ si abbia

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_1(x_0, x)}{x - x_0} = 0.$$

Pertanto, essendo $f(x) = P_1(x_0, x) + R_1(x_0, x)$, si ha che $f(x)$ si può esprimere come somma di un polinomio di primo grado in x e di un “resto” che è infinitesimo, per x tendente ad x_0 , di ordine superiore ad $x - x_0$.

Possiamo ora chiederci se la derivabilità di f in x_0 fino ad un certo ordine n , permetta di esprimere $f(x)$ come somma di un polinomio di grado n , $P_n(x_0, x)$ e di un infinitesimo $R_n(x_0, x)$, per x tendente ad x_0 , di ordine superiore ad $(x - x_0)^n$, ossia tale che

$$(1) \quad f(x) = P_n(x_0, x) + R_n(x_0, x)$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x_0, x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Incominciamo ad enunciare il seguente

7.1 Lemma- Sia F una funzione reale definita in un intorno $U \subseteq \mathfrak{R}$ di un punto x_0 e di classe C^n . C.N. e S. affinché

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

è che

$$(4) \quad F^{(k)}(x_0) = 0, \quad k = 0, \dots, n.$$

In conseguenza di tale lemma si ha che il polinomio $P_n(x_0, x)$, affinché valga la (2) deve soddisfare alle seguenti condizioni

$$(7) \quad P_n^{(k)}(x_0, x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad k = 0, \dots, n.$$

Tali condizioni permettono di individuare il seguente unico polinomio

$$(8) \quad P_n(x_0, x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(x_0) \frac{(x-x_0)^k}{k!}$$

che viene detto **polinomio di Taylor di ordine n relativo al punto x_0** .

Vale pertanto il seguente risultato:

7.2 Teorema- (formula di Taylor con il resto di Peano)-

Sia f una funzione reale definita in un intorno $U \subseteq \mathfrak{R}$ di un punto x_0 e di classe C^n . Allora per $x \in U$ vale la formula: (* nel caso $x_0 = 0$ si parla di **Teorema - formula di Maclaurin**)

$$(9) \quad f(x) = P_n(x_0, x) + R_n(x_0, x).$$

Essendo $P_n(x_0, x)$ il polinomio di Taylor di ordine n relativo al punto x_0 , e

$$(10) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x_0, x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

La grandezza $R_n(x_0, x)$ si dice **“resto” della formula di Taylor**: esso esprime l'errore che si commette quando si sostituisce alla funzione f il polinomio $P_n(x_0, \cdot)$.

In virtù della (10) si può anche scrivere:

$$(11) \quad R_n(x_0, x) = \sigma_n(x_0, x) \frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

con

$$(12) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \sigma_n(x_0, x) = 0.$$

La (11) si dice **forma di Peano** per il resto.

Per avere qualche valutazione quantitativa del resto $R_n(x_0, x)$ facciamo delle ipotesi più restrittive sulla funzione f . Vale il seguente:

7.4 Teorema- Sia f una funzione reale definita in un intorno $U \subseteq \mathfrak{R}$ di un punto x_0 e di classe C^{n+1} . Allora, per ogni $x \in U$ esiste un punto ξ tra x_0 ed x tale che

$$(12) \quad R_n(x_0, x) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Grazie a questo teorema si ha:

$$(13) \quad f(x) = P_n(x_0, x) + f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

La (13) costituisce la **formula di Taylor con il resto R_n nella forma di Lagrange**.

La formula di Taylor può essere proficuamente utilizzata per lo studio dei minimi e massimi relativi. Vale il seguente:

7.3 Teorema- Sia f una funzione reale definita in un intorno $U \subseteq \mathfrak{R}$ di un punto x_0 e di classe C^{n-1} . Inoltre f abbia derivata di ordine n in $x_0 \in U$ e sia

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Allora:

- (i) se n è pari ed è $f^{(n)}(x_0) > 0$ (risp. $f^{(n)}(x_0) < 0$), il punto x_0 è un punto di minimo relativo forte (risp. massimo relativo forte);
- (ii) se n è dispari ed è $f^{(n)}(x_0) > 0$ (risp. $f^{(n)}(x_0) < 0$), la f è crescente (risp. decrescente) in x_0 .

Esercizi

1. Si considerino le due funzioni $f :]-1, +\infty[\rightarrow \mathfrak{R}$ ed $g : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ definite da:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x) \\ g(x) &= e^x \end{aligned}$$

e si dimostri che

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n!} + R_n(x)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

con

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{x^n} = 0.$$

2. Si considerino le funzioni $f, g : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ circolari:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x \\ g(x) &= \cos x \end{aligned}$$

e si dimostri che

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

3. Applicando la formula di Taylor si dimostri che

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x} = \frac{1}{6}, \quad (ii) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\ln(1+x^2)} = 0, \quad (iii) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\sin x} = 1.$$

UNITA' 8

L'INTEGRALE SECONDO RIEMANN

Considerazioni preliminari

La teoria dell'integrazione considera due concetti fondamentali: quello di “Integrale Definito” e quello di “Primitiva”. La connessione di questi due concetti, ad opera di Leibniz e Newton, fu il grande successo iniziale dell'Analisi Infinitesimale.

In questo Modulo ci occuperemo della teoria dell'integrazione secondo Riemann, soffermandoci in particolare sulla teoria dell'integrazione delle funzioni reali di una variabile reale, definite e limitate in intervalli finiti.

Successivamente estenderemo il concetto di integrale definito per funzioni non limitate o per funzioni definite in intervalli infiniti.

*Con l'aiuto dell'Arte Analitica è possibile
determinare esattamente e geometricamente
le aree e le lunghezze ... delle curve*
I. Newton

APPROCCIO INTUITIVO

Prendiamo in esame la seguente figura:

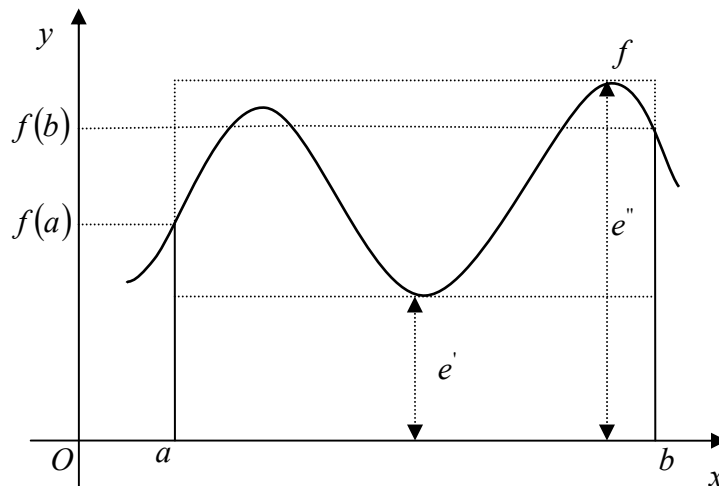


fig.1

ci proponiamo di calcolare l'area S della parte di piano compresa tra la curva marcata in figura, (grafico di una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$), le rette di equazioni $x = a$, $x = b$ e l'asse x . Evidentemente si ha:

$$(b-a)e' \leq S \leq (b-a)e''.$$

Consideriamo ora la fig. 2, dove abbiamo diviso l'intervallo $[a, b]$ prendendo un punto $c \in]a, b[$.

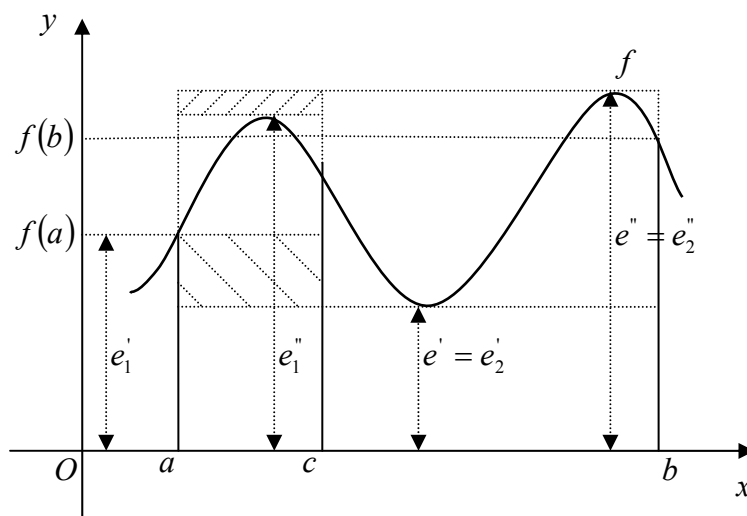


fig.2

Evidentemente si ha:

$$(c-a)e'_1 + (b-c)e'_2 \leq S \leq (c-a)e''_1 + (b-c)e''_2.$$

Con

$$(c-a)e'_1 + (b-c)e'_2 \geq (b-a)e' \text{ si è aggiunto il rettangolo tratteggiato così } \backslash,$$

$$(c-a)e''_1 + (b-c)e''_2 \leq (b-a)e'' \text{ si è sottratto il rettangolo tratteggiato così } /.$$

Consideriamo ora la fig. 3, dove abbiamo diviso l'intervallo $[a, b]$ prendendo un ulteriore punto $d \in]a, b[$.

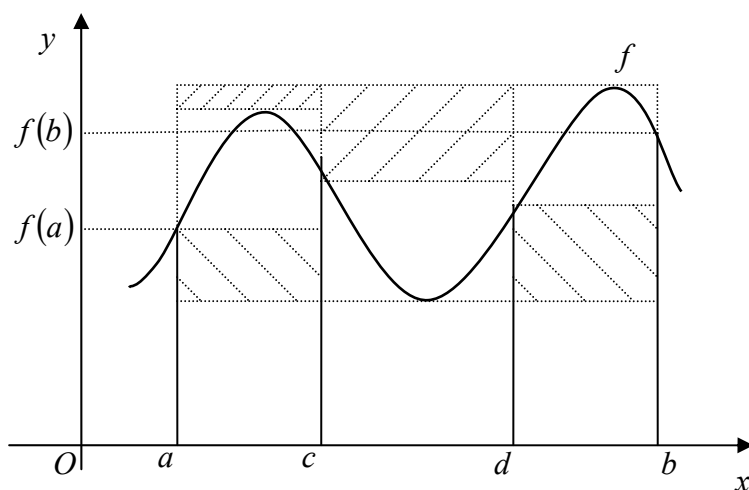


fig.3

Evidentemente si ha:

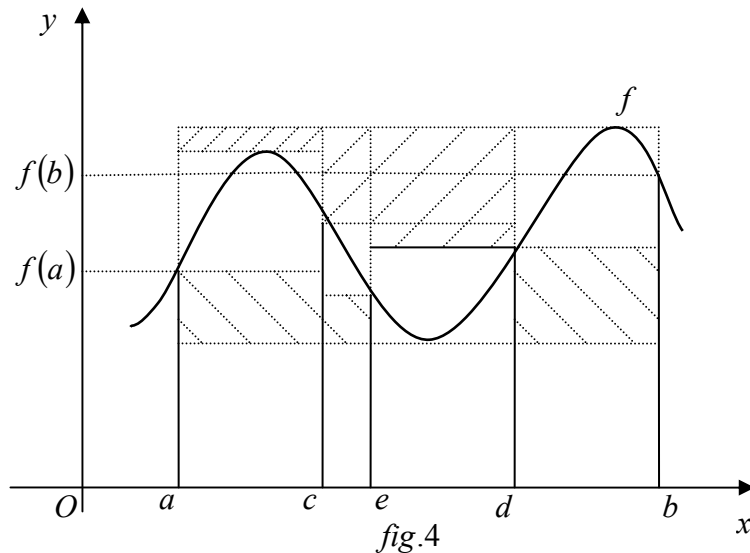
$$(c-a)e'_1 + (d-c)e'_2 + (b-d)e'_3 \leq S \leq (c-a)e''_1 + (d-c)e''_2 + (b-d)e''_3.$$

Con

$$(c-a)e'_1 + (d-c)e'_2 + (b-d)e'_3 \geq (c-a)e'_1 + (b-c)e'_2 \geq (b-a)e' \\ \text{si è aggiunto un altro rettangolo tratteggiato così } \backslash,$$

$$(c-a)e''_1 + (d-c)e''_2 + (b-d)e''_3 \leq (c-a)e''_1 + (b-c)e''_2 \leq (b-a)e'' \\ \text{si è sottratto un altro rettangolo tratteggiato così } /.$$

Consideriamo ora la fig. 4, dove abbiamo diviso l'intervallo $[a, b]$ prendendo un ulteriore punto $e \in]a, b[$



Dalle figure 1, 2, 3, 4 si vede come suddividendo l'intervallo $[a, b]$, aggiungendo punti, le somme di prodotti con gli e'_k aumentano mentre le somme di prodotti con gli e''_k diminuiscono, fermo restando che l'area S è sempre compresa tra queste somme. Pertanto se prendessimo “infiniti” punti, si intuisce che sia le somme con gli e'_k , sia le somme con gli e''_k coinciderebbero con S .

APPROCCIO RIGOROSO

1.1 Definizione - Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso ($a < b$),
 $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ un insieme finito di numeri reali tale che

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Si chiama **suddivisione** di $[a, b]$ operata da X la famiglia di intervalli parziali

$$B_k = [x_{k-1}, x_k] \quad (k = 1, \dots, n).$$

Nel seguito useremo senza ambiguità il simbolo X per indicare la suddivisione operata dall'insieme di punti X .

Nell'insieme $\Omega(a, b)$ delle suddivisioni di $[a, b]$ si può introdurre una relazione d'ordine:

1.2 Definizione - Date due suddivisioni $X, X' \in \Omega(a, b)$ si dice che X' è **più fine** di X e si scrive $X \prec X'$, se l'insieme X è contenuto nell'insieme X' .

E' chiaro che, se la suddivisione X' è più fine di X , allora l'insieme X' è ottenuto inserendo altri punti nell'insieme X .

Inoltre, se X_1 e X_2 sono due suddivisioni di $[a, b]$, allora l'insieme di punti $X_1 \cup X_2$ opera una suddivisione di $[a, b]$ che è più fine sia di X_1 che di X_2 .

1.3 Definizione - Data una suddivisione $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dell'intervallo $[a, b]$, si dice **parametro di finezza di X** il numero

$$\delta = \max\{\delta_k = x_k - x_{k-1}, \quad k = 1, \dots, n\}.$$

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una data suddivisione di $[a, b]$, poniamo:

$$e'_k = \inf\{f(x) : x \in B_k\}$$

$$e''_k = \sup\{f(x) : x \in B_k\}.$$

Se f è limitata, ponendo

$$e' = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}, \quad e'' = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

si riconosce facilmente che

$$e' = \min\{e'_k : k = 1, \dots, n\},$$

$$e'' = \max\{e''_k : k = 1, \dots, n\}.$$

1.4 Definizione - Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una suddivisione di $[a, b]$, le espressioni

$$S'(f, X) = \sum_{k=1}^n e'_k \delta_k, \quad S''(f, X) = \sum_{k=1}^n e''_k \delta_k$$

si dicono, rispettivamente, **somma inferiore** e **somma superiore** della funzione f relativa alla suddivisione X .

1.5 Lemma - Siano X_1 e X_2 due suddivisioni di $[a, b]$ con X_2 più fine di X_1 . Allora si ha:

$$S'(f, X_1) \leq S'(f, X_2), \quad S''(f, X_1) \geq S''(f, X_2)$$

(in altri termini la somma inferiore di una funzione f relativa ad una certa suddivisione, è minore o uguale, della somma inferiore relativa ad una suddivisione più fine, mentre avviene al contrario per la somma superiore).

In questa trattazione Liceale omettiamo la dimostrazione del lemma.

1.6 **Teorema** - Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e X_1 ed X_2 due suddivisioni qualunque di $[a, b]$, si ha:

$$S'(f, X_1) \leq S''(f, X_2)$$

(in altri termini una qualunque somma inferiore è minore o uguale di una qualunque somma superiore).

In questa trattazione Liceale omettiamo la dimostrazione del teorema.

1.7 **Definizione** - Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata; i numeri reali

$$I'(f) = \sup \{ S'(f, X) : X \in \Omega(a, b) \}$$

$$I''(f) = \inf \{ S''(f, X) : X \in \Omega(a, b) \}$$

si dicono, rispettivamente, **Integrale Inferiore** ed **Integrale Superiore** di f in $[a, b]$ **secondo Riemann**.

Se

$$I'(f) = I''(f)$$

la funzione f si dice Integrabile secondo Riemann

e tale comune valore si chiama

Integrale di f in $[a, b]$ (oppure esteso all'intervallo $[a, b]$)

e si indica con il simbolo:

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx = I'(f) = I''(f).$$

Esempio 1. - Consideriamo la funzione $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x) = x^2,$$

si può dimostrare con non poca fatica che

$$\int_1^4 x^2 dx = 21.$$

Evidentemente questo valore **21**, è l'**area** della parte di piano compresa tra le rette di equazione $x = 1$, $x = 4$, l'asse delle x ed il grafico della funzione f .

Osservazione:

Fortunatamente la determinazione dell'integrale definito di una funzione f in $[a, b]$ (sempre che sia integrabile) viene effettuata, **non utilizzando la definizione data**, ma (grazie al Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale) **facendo ricorso** ad un'altra nozione, quella di "**Primitiva**" o più in generale di "**Integrale indefinito**" di una funzione. Dette nozioni verranno da noi affrontate quanto prima.

Calcolo dell'integrale $\int_1^4 x^2 dx$, utilizzando la definizione.

Osserviamo che la funzione data $f(x) = x^2$, nell'intervallo considerato $[1,4]$, risulta: limitata, continua e monotona strettamente crescente¹.

Dividiamo ora l'intervallo limitato $[1,4]$ in n intervalli uguali, mediante l'insieme $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ di $n+1$ punti, presi come segue:

$$1 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_{n-1} < x_n = 4.$$

Evidentemente l'ampiezza δ_k del generico intervallo $B_k = [x_{k-1}, x_k]$, anzi di ogni intervallo vale:

$$\delta_k = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n}, \text{ cioè si ha: } \delta_k = \frac{3}{n}, \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Inoltre essendo la funzione strettamente crescente si ha:

$$e'_k = f(x_{k-1}) = x_{k-1}^2, \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots, n; \quad e''_k = f(x_k) = x_k^2, \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

In particolare osservando che:

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1 + 1\frac{3}{n}, \quad x_2 = 1 + 2\frac{3}{n}, \dots, x_{k-1} = 1 + (k-1)\frac{3}{n}, \quad x_k = 1 + k\frac{3}{n}, \dots, x_{n-1} = 1 + (n-1)\frac{3}{n}, \quad x_n = 1 + n\frac{3}{n}$$

si ha:

$$e'_1 = f(x_0) = x_0^2 = 1^2 = 1, \quad e'_2 = f(x_1) = x_1^2 = \left(1 + 1\frac{3}{n}\right)^2, \quad e'_3 = f(x_2) = x_2^2 = \left(1 + 2\frac{3}{n}\right)^2, \dots,$$

$$e'_k = f(x_{k-1}) = x_{k-1}^2 = \left(1 + (k-1)\frac{3}{n}\right)^2, \dots, e'_n = f(x_{n-1}) = x_{n-1}^2 = \left(1 + (n-1)\frac{3}{n}\right)^2;$$

$$e''_1 = f(x_1) = x_1^2 = \left(1 + 1\frac{3}{n}\right)^2, \dots, e''_{n-1} = f(x_{n-1}) = x_{n-1}^2 = \left(1 + (n-1)\frac{3}{n}\right)^2, e''_n = f(x_n) = x_n^2 = \left(1 + n\frac{3}{n}\right)^2$$

Pertanto:

$$1. \quad S'(f, X) = \sum_{k=1}^n e'_k \delta_k = \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n e'_k = \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n \left[1 + \frac{6}{n}(k-1) + \frac{9}{n^2}(k-1)^2 \right] = \dots = 21 - \frac{45}{2n} + \frac{9}{2n^2};$$

$$2. \quad S''(f, X) = \sum_{k=1}^n e''_k \delta_k = \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n e''_k = \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n \left[1 + \frac{6}{n}(k) + \frac{9}{n^2}(k)^2 \right] = \dots = 21 + \frac{45}{2n} + \frac{9}{2n^2}. \quad \text{Quindi}$$

abbiamo:

$$I'(f) = \sup\{S'(f, X) : X \in \Omega(a, b)\} = 21, \quad I''(f) = \inf\{S''(f, X) : X \in \Omega(a, b)\} = 21; \text{ Ossia:}$$

$$\int_1^4 x^2 dx = 21.$$

Esercizio proposto

Si calcoli l'integrale $\int_1^2 x^3 dx$.

N.B. Nella determinazione delle 1. e 2. dopo aver esplicitato ulteriormente le sommatorie si è fatto ricorso alle: $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

¹ Vedasi teorema 1.9 di pagina seguente.

1.8 Teorema - (Condizione di integrabilità di Riemann) Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata.

Condizione necessaria e sufficiente affinché f sia integrabile in $[a, b]$ è che per ogni $\varepsilon > 0$ esista una suddivisione X di $[a, b]$ tale che $S''(f, X) - S'(f, X) < \varepsilon$; in simboli:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists X \in \Omega(a, b) : S''(f, X) - S'(f, X) < \varepsilon .$$

Dim.:

Dimostriamo la condizione sufficiente.

Scelto $\varepsilon > 0$ arbitrario, per la definizione 1.7 si ha:

$$S'(f, X) \leq I'(f) \leq I''(f) \leq S''(f, X)$$

E quindi

$$0 \leq I''(f) - I'(f) < \varepsilon .$$

Da cui per l'arbitrarietà di ε , segue

$$I'(f) = I''(f) .$$

Dimostriamo ora la condizione necessaria.

Per definizione di integrale inferiore e di integrale superiore, fissato $\varepsilon > 0$, esistono due suddivisioni X_1 ed X_2 tali che:

$$S'(f, X_1) > I'(f) - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$S''(f, X_2) < I''(f) + \frac{\varepsilon}{2} .$$

Sia $X = X_1 \cup X_2$. Allora, per il lemma 1.5, si ha:

$$S'(f, X) \geq S'(f, X_1) > I'(f) - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$S''(f, X) \leq S''(f, X_2) < I''(f) + \frac{\varepsilon}{2} ,$$

da cui, essendo $I'(f) = I''(f)$, segue:

$$S''(f, X) - S'(f, X) < \varepsilon .$$

1.9 Teorema - Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è monotona e limitata, allora essa è integrabile in $[a, b]$.

Dim.:

Supponiamo che f sia non decrescente. Scelto $\varepsilon > 0$ ed arbitrariamente, sia $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una suddivisione di $[a, b]$, il cui parametro di finezza δ sia tale che

$$\delta < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} .$$

Avendosi nel caso in esame: $e'_k = f(x_{k-1})$ ed $e''_k = f(x_k)$ $\forall k = 1, 2, 3, \dots, n$, risulta:

$$S''(f, X) - S'(f, X) = \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) \delta_k \leq \delta \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \delta (f(b) - f(a)) < \varepsilon .$$

Per il teorema 1.8 si ha allora che f è integrabile in $[a, b]$.

1.10 **Definizione** - Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile in $[a, b]$ ($a < b$), il numero μ definito da:

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Si dice **valore medio** di f in $[a, b]$.

Si ha il seguente:

1.11 **Teorema - (Della media integrale)** - Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione integrabile in $[a, b]$, il suo valor medio μ è compreso tra il suo estremo inferiore e' ed il suo estremo superiore e'' in $[a, b]$.

Dim.:

Sia $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una assegnata suddivisione di $[a, b]$; si ha:

$$S'(f, X) \leq \int_a^b f(x) dx \leq S''(f, X).$$

Avendosi inoltre

$$e' \leq e'_k \leq e''_k \leq e'' \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots, n,$$

moltiplicando per $\delta_k > 0$ e sommando in k da 1 ad n , si ottiene

$$e'(b-a) \leq S'(f, X) \leq S''(f, X) \leq e''(b-a)$$

Si ha dunque

$$e'(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq e''(b-a)$$

Da cui, dividendo per $b-a > 0$, si ricava:

$$e' \leq \mu \leq e''.$$

Osservazione: se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, assume tutti i valori tra il massimo ed il minimo e quindi tutti i valori tra e' ed e'' pertanto $\exists \xi \in [a, b] : f(\xi) = \mu$. Quindi dal teorema della media si ha:

$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ e moltiplicando ambo i membri per $b-a > 0$, si ha ancora

$$f(\xi)(b-a) = \int_a^b f(x) dx$$

la quantità $f(\xi)(b-a)$ rappresenta l'area del rettangolo di base $b-a$ ed altezza $f(\xi)$, ricordando il significato geometrico di $\int_a^b f(x) dx$, si capisce la ragione per la quale la quantità $\mu = f(\xi)$ viene detto **valore medio** di f in $[a, b]$.

Valgono inoltre i seguenti:

1.12 **Teorema** - Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a < b$) una funzione limitata e $c \in]a, b[$. Se f è integrabile in $[a, c]$ ed in $[c, b]$, allora essa è integrabile in $[a, b]$ e si ha:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Viceversa, vale il seguente risultato:

1.13 **Teorema** - Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a < b$) è integrabile in $[a, b]$ e c è un punto qualsiasi di $]a, b[$, allora f è integrabile in ciascuno degli intervalli $[a, c]$ e $[c, b]$.

1.14 **Corollario** - Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a < b$) è integrabile in $[a, b]$ e se

$$X = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$$

è una suddivisione dell'intervallo $[a, b]$, allora f è integrabile in ogni intervallo parziale $B_k = [x_{k-1}, x_k]$ e risulta:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) dt.$$

Segnaliamo inoltre che, se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a < b$) è integrabile in $[a, b]$ è utile attribuire un significato al simbolo

$$\int_b^a f(x) dx.$$

1.15 **Definizione** - Poniamo per definizione

$$(1) \quad \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

$$(2) \quad \int_a^a f(x) dx = 0.$$

Vale allora il seguente risultato:

1.16 **Teorema** - Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a < b$) è integrabile in $[a, b]$, comunque si prendano $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$, vale la relazione:

$$(3) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx.$$

Osservazione: Se f è integrabile in $[a, b]$, ed α e β sono punti di $[a, b]$, in virtù della (1) si ha:

$$\frac{1}{\alpha - \beta} \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx = - \frac{1}{\alpha - \beta} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

Pertanto, per il valor medio di f nell'intervallo di estremi α e β , non ha importanza che $\alpha < \beta$ o che $\beta < \alpha$.

Esercizi

1. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione costante:

$$f(x) = k, \quad \forall x \in [a, b].$$

Si dimostri che

$$\int_a^b f(x) dx = k(b - a).$$

2. Siano $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabili in $[a, b]$. Si dimostri che

$$f + g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

è integrabile in $[a, b]$ e si ha:

$$\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

3. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile in $[a, b]$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Si dimostri che

$$\lambda f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

è integrabile in $[a, b]$ e si ha:

$$\int_a^b (\lambda f)(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx.$$

4. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a < b$) integrabile in $[a, b]$ e non negativa. Si dimostri che

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

5. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a < b$) integrabile in $[a, b]$. Si dimostri che anche $|f| : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile in $[a, b]$ e si ha

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

6. Siano $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabili in $[a, b]$. Si dimostri che $fg : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile in $[a, b]$.

7. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile in $[a, b]$ e sia $[c, d]$ un intervallo contenuto in $[a, b]$. Si dimostri che f è integrabile in $[c, d]$.

8. Si dimostri, utilizzando la definizione di integrale, che

$$(i) \int_a^b 3x^2 dx = b^3 - a^3 \quad (a < b), \quad (ii) \int_0^a x dx = \frac{1}{2} a^2 \quad (a > 0).$$

UNITA' 9

INTEGRABILITA' DELLE FUNZIONI CONTINUE A TRATTI

2.1 Teorema - Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$, allora essa è integrabile.

2.2 Definizione - Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una suddivisione di $[a, b]$ e $\Xi_X = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ una n -upla di punti tali che

$$\xi_k \in B_k = [x_{k-1}, x_k] \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Si dice **somma di Cauchy** della f relativa alla suddivisione X ed alla scelta dei punti Ξ_X l'espressione:

$$S(f, X, \Xi_X) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \delta_k.$$

Vale il seguente:

2.3 Teorema - Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua; allora le somme inferiori, le somme superiori e le somme di Cauchy di f tendono all'integrale di f , al tendere a zero del parametro di finezza.

Diamo ora alcune proprietà elementari dell'integrale nell'ambito delle funzioni continue che conseguono immediatamente dalla presentazione dell'integrale come limite.

2.4 Teorema - Siano $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue in $[a, b]$, allora si ha:

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

2.5 Teorema - Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$, e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora si ha:

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx.$$

2.6 Teorema - Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$, si ha:

$$m'(b-a) \leq I(f) \leq m''(b-a)$$

dove $m' = \min\{f(x), x \in [a, b]\}$ e $m'' = \max\{f(x), x \in [a, b]\}$.

Inoltre $\exists \xi \in [a, b]$ tale che

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a).$$

2.7 Teorema - Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \in \mathfrak{R} & \text{per } x = a \\ 0 & \text{per } a < x < b \\ \mu \in \mathfrak{R} & \text{per } x = b \end{cases}$$

Allora, quali che siano i valori di λ e μ , la funzione f è integrabile in $[a, b]$ e si ha:

$$\int_a^b f(x) dx = 0.$$

Ne viene come conseguenza il seguente

2.8 Teorema - Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e $g : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$ una funzione definita da

$$g(x) = \begin{cases} \lambda \in \mathfrak{R} & \text{per } x = a \\ f(x) & \text{per } a < x < b \\ \mu \in \mathfrak{R} & \text{per } x = b \end{cases}$$

Allora, quali che siano i valori di λ e μ , la funzione g è integrabile in $[a, b]$ e si ha:

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

2.9 Definizione - Una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$ si dice **continua a tratti** in $[a, b]$ se esiste una suddivisione

$$X = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$$

dell'intervallo $[a, b]$ tale che f sia continua in ogni intervallo $B_k =]x_{k-1}, x_k[$, $\forall k = 1, 2, 3, \dots, n$ e si abbia

$$\lim_{x \rightarrow x_{k-1}^+} f(x) = f^+(x_{k-1}) \in \mathfrak{R} \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\lim_{x \rightarrow x_k^-} f(x) = f^-(x_k) \in \mathfrak{R} \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots, n$$

(f può assumere valori arbitrari per $x = x_k$, $\forall k = 1, 2, 3, \dots, n$).

2.10 Teorema - Una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$ continua a tratti in $[a, b]$ è integrabile in $[a, b]$, e risulta:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_k(x) dx.$$

Dove $f_k : B_k \rightarrow \mathfrak{R}$ $\forall k = 1, 2, 3, \dots, n$ è così definita: $g(x) = \begin{cases} f^+(x_{k-1}) & \text{per } x = x_{k-1} \\ f(x) & \text{per } x_{k-1} < x < x_k \\ f^-(x_k) & \text{per } x = x_k \end{cases}$

Possiamo pertanto concludere che l'integrazione di una funzione continua a tratti si riduce all'integrazione di funzioni continue.

UNITA' 10

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

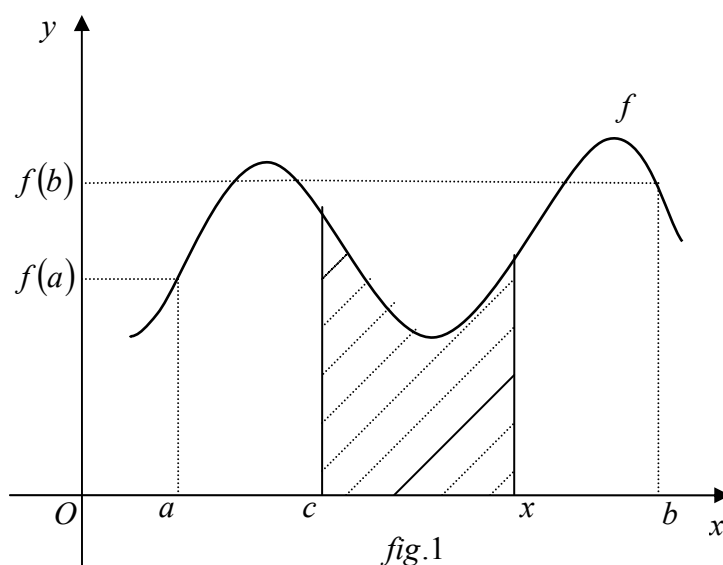
3.1 **Definizione** - Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$ una funzione integrabile nell'intervallo $[a, b]$. Preso un punto $c \in [a, b]$ la funzione

$$F(c, \cdot) : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$$

definita da

$$F(c, x) = \int_c^x f(t) dt$$

Si dice **funzione integrale di f nell'intervallo $[a, b]$** . (Vedasi fig. 1)



Si ha il seguente:

3.2 **Teorema** - Se f è una funzione integrabile in $[a, b]$, allora $F(c, \cdot)$ è continua in $[a, b]$.

3.3 **Teorema** - Se f è una funzione integrabile in $[a, b]$ ed è continua a destra (risp. a sinistra) nel punto $x_0 \in [a, b]$, allora $F(c, \cdot)$ ha derivata destra (risp. sinistra) nel punto x_0 e risulta:

$$F'_d(c, x_0) = f(x_0) \quad (F'_s(c, x_0) = f(x_0)).$$

3.4 **Corollario** - Se f è una funzione integrabile in $[a, b]$ ed è continua nel punto $x_0 \in [a, b]$, allora $F(c, \cdot)$ è derivabile nel punto x_0 e risulta:

$$F'(c, x_0) = f(x_0).$$

3.5 Corollario - Se f è una funzione continua in $[a, b]$, allora $F(c, \cdot)$ è derivabile in $[a, b]$ e per ogni $x \in [a, b]$ si ha:

$$F'(c, x) = f(x).$$

Diamo ora la seguente

3.6 Definizione - Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua a tratti in $[a, b]$. Una funzione continua $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ allora $F(c, \cdot)$ che per ogni punto di continuità x di f verifica l'equazione:

$$G'(x) = f(x),$$

si dice **primitiva** di f in $[a, b]$.

Allora, se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua a tratti, per ogni $c \in [a, b]$ la funzione $F(c, \cdot)$ integrale:

$$F(c, x) = \int_c^x f(t) dt$$

è una primitiva di f in $[a, b]$.

Vale il seguente risultato

3.7 Teorema - Due primitive di una stesa funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continua a tratti in $[a, b]$, differiscono per una costante. Pertanto l'insieme di tutte le primitive di una funzione f continua a tratti in $[a, b]$ è dato da:

$$\Phi = \{F(c, \cdot) + k, \quad k \in \mathbb{R}\}.$$

A tale insieme si dà il nome di **integrale indefinito** e si indica con la notazione:

$$\int f(x) dx = \left\{ \int_c^x f(t) dt + k, \quad k \in \mathbb{R} \right\}.$$

3.8 Teorema - Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua a tratti in $[a, b]$ e $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una primitiva qualsiasi di f in $[a, b]$, allora:

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a).$$

In conclusione, per calcolare l'integrale di una funzione f (continua a tratti) in un intervallo $[a, b]$, basta trovare una primitiva qualsiasi G di f e costruire la differenza $G(b) - G(a)$.

UNITA' 11

APPENDICE

INSIEMI NUMERICI

I NUMERI REALI PER VIA ASSIOMATICA

Siano $\mathfrak{R}$ un insieme,

$$+ : \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} ; \cdot : \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} ;$$

due applicazioni definite in $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}$ ossia due leggi di composizione interne dette rispettivamente addizione e moltiplicazione, per le quali usiamo la seguente notazione:

$x + y$ è il corrispondente di (x, y) mediante l'operazione $+$, lo chiamiamo somma di x e y

xy il corrispondente di (x, y) mediante l'operazione $\cdot$, lo chiamiamo prodotto di x e y

e sia inoltre $\leq$ una relazione d'ordine totale in $\mathfrak{R}$.

L'insieme $\mathfrak{R}$ così strutturato è l'insieme dei numeri reali se valgono i seguenti 12 assiomi:

1. $\forall x, y, z \in \mathfrak{R} \Rightarrow (x + y) + z = x + (y + z)$ Proprietà associativa
2. $\exists e \in \mathfrak{R} : \forall x \in \mathfrak{R} \Rightarrow x + e = e + x = x$ l'elemento e viene detto elemento neutro dell'addizione (*)
3. $\forall x \in \mathfrak{R} \exists x' \in \mathfrak{R} : x + x' = x' + x = 0$ l'elemento x' viene detto opposto di x (**)
4. $\forall x, y \in \mathfrak{R} \Rightarrow x + y = y + x$ Proprietà commutativa
5. $\forall x, y, z \in \mathfrak{R} \Rightarrow (xy)z = x(yz)$ Proprietà associativa
6. $\exists u \in \mathfrak{R}, u \neq 0 : \forall x \in \mathfrak{R} \Rightarrow xu = ux = x$ l'elem. u viene detto elemento neutro della multipl. (*)
7. $\forall x \in \mathfrak{R}, x \neq 0 \exists x' \in \mathfrak{R} : xx' = x'x = 1$ l'elemento x' viene detto reciproco di x (**)
8. $\forall x, y \in \mathfrak{R} \Rightarrow xy = yx$ Proprietà commutativa
9. $\forall x, y, z \in \mathfrak{R} \Rightarrow x(y + z) = xy + xz$ Proprietà distributiva della multipl. rispetto all'add.
10. $\forall x, y, z \in \mathfrak{R}, x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$
11. $\forall x, y \in \mathfrak{R}, 0 \leq x, 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy$
12. $A \subseteq \mathfrak{R}, B \subseteq \mathfrak{R}; A \neq \emptyset, B \neq \emptyset; \forall a \in A, \forall b \in B \ a \leq b$ allora $\exists L \in \mathfrak{R} : a \leq L \leq b \forall a \in A \ e \ \forall b \in B$

L'assioma 12 è conosciuto in letteratura come **assioma della completezza**, inoltre possiamo dire che **$(\mathfrak{R}, +)$ è un gruppo abeliano**; ponendo $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R} - \{0\}$ risulta **$(\mathfrak{R}^*, \cdot)$ gruppo abeliano**, quindi **$(\mathfrak{R}, +, \cdot)$ è un corpo commutativo** cioè un campo. Riassumendo:

$(\mathfrak{R}, +, \cdot, \leq)$ è un campo totalmente ordinato e completo.

(*) l'elemento e di cui all'assioma 2. è unico, si indica con 0 e si chiama zero. Quindi $\mathfrak{R}$ possiede almeno un elemento;

l'elemento u di cui all'assioma 6. è unico, si indica con 1 e si chiama uno. Quindi $\mathfrak{R}$ possiede almeno due elementi.

(**) l'elemento x' di cui all'assioma 3. è unico, si indica con $-x$ e si chiama opposto di x ;

l'elemento x' di cui all'assioma 7. è unico, si indica con x^{-1} oppure con $\frac{1}{x}$ e si chiama reciproco di x .

RETTA REALE ESTESA

Si chiama **retta reale estesa**, e si indica con $\overline{\mathbb{R}}$, l'insieme ottenuto aggiungendo a $\mathbb{R}$ due nuovi elementi, che indichiamo con $-\infty$ e $+\infty$ (- infinito e + infinito) con le proprietà:

- $$\begin{aligned} \text{I. } & \forall x, \quad x \in \mathbb{R} \Rightarrow -\infty < x < +\infty; \quad x + \infty = +\infty; \quad x - \infty = -\infty; \quad \frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0 \\ \text{II. } & \forall x, \quad x \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow x(+\infty) = +\infty; \quad x(-\infty) = -\infty \\ \text{III. } & \forall x, \quad x \in \mathbb{R}_-^* \Rightarrow x(+\infty) = -\infty; \quad x(-\infty) = +\infty \end{aligned}$$

$\overline{\mathbb{R}}$ è un insieme totalmente ordinato, ma, come si può vedere facilmente non è un corpo.

I NUMERI NATURALI SECONDO GIUSEPPE PEANO

Sia $\mathbb{N}$ un insieme ed $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (un'applicazione di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$) tale da soddisfare i seguenti assiomi:
(osservazione: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sigma(n)$ viene detto successivo di n)

1. $\exists$ un “signore” che chiamiamo zero e lo indichiamo con il simbolo 0, che appartiene ad $\mathbb{N}$

0 è un numero naturale

2. $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sigma(n) \in \mathbb{N}$

Il successivo di un numero naturale è ancora un numero naturale

3. $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sigma(n) \neq 0$

Zero non è successivo di alcun numero naturale

4. $\forall n, m \in \mathbb{N} \quad \sigma(n) = \sigma(m) \Rightarrow n = m$

Se due numeri naturali hanno successivi uguali, allora i due numeri naturali sono uguali

5. Se $T \subseteq \mathbb{N}$ tale che:

1. $0 \in T$;
 2. $\forall n \in T \Rightarrow \sigma(n) \in T$
- allora $T = \mathbb{N}$

Principio di Induzione

Per Giuseppe Peano la **coppia logica** $(\mathbb{N}, \sigma)$ soddisfacente gli assiomi di cui sopra **costituisce i**

NUMERI NATURALI.

Sostanzialmente i numeri naturali sono un insieme nel quale è stata introdotta un'applicazione tale da soddisfare tutti gli assiomi di cui sopra.

Osservazione: Il principio di induzione in matematica viene usato sia per definire (definizioni per induzione) sia per dimostrare (dimostrazioni per induzione).

I NUMERI NATURALI COME SOTTOINSIEME INDUTTIVO DI $\mathbb{R}$

Introdurre i numeri naturali secondo Peano “è cosa buona e giusta” tuttavia per le esigenze dell’Analisi matematica è sufficiente considerare $\mathbb{N}$ come sottoinsieme “particolare” di $\mathbb{R}$, così facendo si snellisce di molto il lavoro in quanto in $\mathbb{N}$ si trovano già “tutte” le operazioni con “tutte” le rispettive proprietà; cosa che invece andava fatta con “enorme” fatica, (anche se utile per chiarire molte “cose”) se tali operazioni e proprietà dovevano definirsi a partire dagli assiomi di Peano. Incominciamo col dare la seguente: Definizione di sottoinsieme induttivo di $\mathfrak{R}$

$T \subseteq \mathfrak{R}, T$ è Induttivo se :

$$1. 0 \in T$$

$$2. \forall x \in T \Rightarrow x+1 \in T$$

Osserviamo che $\mathfrak{R}$ stesso è induttivo così pure $\mathfrak{R}^+$ cioè $\{x / x \in \mathfrak{R}, 0 \leq x\}$ risulta induttivo.

Indichiamo con F la famiglia di tutti i sottoinsiemi induttivi di $\mathfrak{R}$ cioè:

$$F = \{X / X \text{ è sottoinsieme induttivo di } \mathfrak{R}\} \neq \emptyset$$

e con $\bigcap_{X \in F} X$ l’intersezione di tutti gli elementi della famiglia F .

Si può dimostrare facilmente che $\bigcap_{X \in F} X$ è induttivo, risulta quindi il più “piccolo” sottoinsieme induttivo di $\mathfrak{R}$ relativamente alla relazione di inclusione. Chiamiamo numeri naturali l’insieme

$$\bigcap_{X \in F} X$$

e lo indichiamo con $\mathbb{N}$.

Intuitivamente esso contiene 0, $0+1=1$, $1+1$ che per definizione chiamiamo due e lo indichiamo con 2, quindi $2+1$ che per definizione lo chiamiamo tre e lo indichiamo con 3, ecc., ecc.,..... Riassumendo:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

I NUMERI INTERI RELATIVI

$\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{N} \vee -x \in \mathbb{N}\}$ cioè $\mathbb{Z} = \{0; 1; -1; 2; -2; 3; -3; \dots; n; -n; \dots\}$. risulta: $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{R}$ infatti: per esempio $-1 \in \mathbb{Z}$ e $-1 \notin \mathbb{N}$, $-1/2 \in \mathbb{R}$ e $-1/2 \notin \mathbb{Z}$

I NUMERI RAZIONALI

$$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} / \exists p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \wedge x = pq^{-1}\}$$

I numeri razionali sono intuitivamente tutte le possibili frazioni, inoltre si ha:

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R};$$

per il momento potrebbe anche essere $\mathbb{Q} = \mathbb{R}$; Ma si può dimostrare per esempio che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ mentre $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$.

INSIEME DEI NUMERI IRRAZIONALI

Si può dimostrare che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ mentre $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ quindi $\mathbb{R} - \mathbb{Q} \neq \emptyset$, indichiamo con $\mathfrak{I}$ l'insieme $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ che costituisce i **Numeri Irrazionali**.

$\pi, e \in \mathfrak{I}$ cioè π, e sono numeri irrazionali.

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

DIMOSTRAZIONE:

Supponiamo per assurdo che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ cioè che: $\exists p, q \in \mathbb{N}, q \neq 0 : (p/q)^2 = 2$.

Osserviamo che non è restrittivo supporre p, q primi fra loro, siano allora p, q primi tra loro;

$$\text{da } (p/q)^2 = 2 \text{ segue che } p^2/q^2 = 2; p^2 = 2q^2; p^2 \text{ pari; quindi } \underline{p \text{ pari}} (*)$$

cioè p è del tipo $p=2k$, allora da $p^2=2q^2$, segue $(2k)^2=2q^2$ ossia $4k^2=2q^2$ e quindi $2k^2=q^2$ cioè q^2 pari che per $(*)$ significa $\underline{q}$ pari, contro il fatto che p, q sono primi fra loro, dunque $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ C.V.D..

Vale il seguente teorema: (**esistenza della radice quadrata in $\mathfrak{R}$**)

$$\forall y \in \mathfrak{R}^+ \exists! x \in \mathfrak{R}^+ : x^2 = y$$

x viene detto radice quadrata aritmetica di y e si indica con $\sqrt{y}$, cioè si pone: $x = \sqrt{y}$.

Riassumendo:

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}.$$

Si può dimostrare che l'insieme $\bigcap_{X \in F} X$ con l'applicazione $\sigma : \bigcap_{X \in F} X \rightarrow \bigcap_{X \in F} X$ così definita

$$\sigma(x) = x + 1$$

cioè definire, com'è naturale, successivo di x l'elemento $x + 1$, soddisfa gli assiomi di Giuseppe Peano.

* $p \in \mathbb{N}$, p^2 pari $\Rightarrow p$ pari. Dimostrare l'asserto equivale a dimostrare, p dispari $\Rightarrow p^2$ dispari $p=2k+1$ quindi $p^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1$ cioè p^2 dispari; C.V.D..

ESISTENZA DELLA RADICE QUADRATA IN $\mathfrak{R}$

Teorema: $\forall y \in \mathfrak{R}^+ \exists! x \in \mathfrak{R}^+ : x^2 = y$.

(x viene detto radice quadrata aritmetica di y e si indica con $\sqrt{y}$, cioè si pone: $x = \sqrt{y}$)

Alla dimostrazione del teorema premettiamo il seguente lemma preparatorio:

Lemma: $\forall \alpha > 1 \exists \beta > 1 : \beta^2 \leq \alpha$

Dim.: sia $\sigma \in \mathfrak{R}$, $1 < \sigma < \alpha$ allora $\sigma \vee \frac{\alpha}{\sigma}$ fanno al caso nostro, cioè:

$$\sigma^2 \leq \alpha \vee \left(\frac{\alpha}{\sigma} \right)^2 \leq \alpha; \quad (1)$$

se così non fosse si ha: $\sigma^2 > \alpha \wedge \left(\frac{\alpha}{\sigma} \right)^2 > \alpha$; moltiplicando membro a membro si ha:

$\sigma^2 \cdot \left(\frac{\alpha}{\sigma} \right)^2 > \alpha \cdot \alpha$; cioè $\alpha^2 > \alpha^2$, il che è assurdo, dunque risulta vera la (1) e quindi provato il lemma.

Dimostriamo ora il teorema:

Unicità: siano $x_1, x_2 \in \mathfrak{R}^+ : x_1^2 = y \wedge x_2^2 = y$ allora non può che essere $x_1 = x_2$, infatti da $x_1 < x_2$ segue $x_1^2 < x_2^2$ cioè $y < y$, analogamente da $x_1 > x_2$ segue $y > y$.

Esistenza:

se $y = 0$ si ha $x = 0$, se $y = 1$ si ha $x = 1$, rimangono i seguenti due casi:

$$0 < y < 1 \text{ e } y > 1$$

Proviamo il teorema per $y > 1$, consideriamo i seguenti due sottoinsiemi di $\mathfrak{R}$:

$A = \{a \in \mathfrak{R}^+ : a^2 \leq y\}$ e $B = \{b \in \mathfrak{R}^+ : b^2 \geq y\}$, osserviamo che: $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$ infatti

$1 \in A$ e $y \in B$ ed inoltre $\forall a \in A, \forall b \in B$ si ha $a \leq b$, quindi per l'assioma 12 dei numeri reali

$\exists L \in \mathfrak{R}^+ : a \leq L \leq b \forall a \in A \text{ e } \forall b \in B$ e si può dimostrare che risulta $L^2 = y$; infatti da $L^2 < y$ segue

che $\frac{y}{L^2} > 1$, quindi grazie al lemma testé citato $\exists \beta > 1 : \beta^2 \leq \frac{y}{L^2}$, ossia $\beta^2 L^2 \leq y$, quindi $\beta L \in A$,

d'altro canto essendo $\beta > 1$, si ha $\beta L > L$, ossia esiste un elemento di A maggiore di L , contro il fatto che $a \leq L \forall a \in A$; analogamente si prova che non può essere $L^2 > y$, dunque rimane provato

il teorema quando $y > 1$. Quando $0 < y < 1$, basta osservare che $\frac{1}{y} > 1$, quindi siamo nel caso già

visto, pertanto $\exists L \in \mathfrak{R}^+ : L^2 = \frac{1}{y}$, cioè $\left(\frac{1}{L} \right)^2 = y$ e con ciò abbiamo completato la dimostrazione.

I NUMERI COMPLESSI

Vediamo ora di introdurre un nuovo campo: il **corpo commutativo dei numeri complessi** $\mathcal{C}$.

Tale campo contiene (in un certo senso) il corpo dei numeri reali $\mathfrak{R}$ e permette di risolvere alcuni problemi che in $\mathfrak{R}$ non ammettono soluzione.

Definizione – Si indica con $\mathcal{C}$ l'insieme $\mathfrak{R}^2$ in cui si introducono la relazione di uguaglianza e le operazioni di addizione e moltiplicazione nel modo seguente:

$$\text{Se } z = (a, b), \quad w = (c, d)$$

$$\text{I. } z = w \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} a = c \wedge b = d$$

$$\text{II. } z + w \stackrel{\text{def}}{=} (a + c, b + d)$$

$$\text{III. } z \cdot w \stackrel{\text{def}}{=} (ac - bd, ad + bc)$$

Teorema – L'insieme $\mathcal{C}$ sopra introdotto è un corpo commutativo rispetto alle operazioni di addizione e moltiplicazioni.

Dim.: Banale se si assume come elemento neutro dell'addizione $e = (0, 0)$, come elemento neutro della moltiplicazione $u = (1, 0)$ e si osserva che l'opposto di $z = (a, b)$ è $-z = (-a, -b)$ mentre se

$$z = (a, b) \neq (0, 0) \text{ il simmetrico di } z \text{ è } z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right).$$

Teorema – (Legge di annullamento del prodotto)

Il prodotto è nullo se e solo se è nullo uno dei fattori.

Teorema - $\mathcal{C}$ possiede un sottocorpo che è isomorfo⁽¹⁾ a $\mathfrak{R}$.

Infatti considerato il sottoinsieme $\underline{\mathfrak{R}} \subseteq \mathcal{C}$

$$\underline{\mathfrak{R}} = \{z = (a, b) \in \mathcal{C} : b = 0\}$$

si ha che esso è un sottocorpo di $\mathcal{C}$, inoltre l'applicazione $x \rightarrow (x, 0)$ di $\mathfrak{R} \rightarrow \underline{\mathfrak{R}}$ è iniettiva e conserva le operazioni di addizione e moltiplicazione; pertanto possiamo identificare $\underline{\mathfrak{R}}$ con $\mathfrak{R}$ e scrivere x in luogo di $(x, 0)$.

Consideriamo ora l'elemento $i = (0, 1)$. Risulta

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -(1, 0) = -1$$

Con tali convenzioni, tenendo conto che per ogni $z = (a, b) \in \mathcal{C}$ vale la seguente relazione:

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0)$$

possiamo scrivere:

$$z = a + ib$$

⁽¹⁾ Vedasi oltre OMOMORFISMI - ISOMORFISMI

Definizione – Il simbolo $z = a + ib$ si dice **forma algebrica** del numero complesso $z = (a, b)$. Essa riesce particolarmente utile perché il calcolo con i numeri complessi, scritti sotto forma algebrica, si esegue con le consuete regole formali, tenendo presente che $i^2 = -1$.

Per quanto riguarda lo sviluppo di questa parte si rimanda ad un qualsiasi manuale scolastico, cos'è pure per gli sviluppi derivanti dalla **forma trigonometrica dei numeri complessi**.

Altre considerazioni

Siano $z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ e $w = r(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$ due numeri complessi scritti in forma trigonometrica, si è visto che:

$$z \cdot w = \rho \cdot r (\cos(\theta + \varphi) + i \operatorname{sen}(\theta + \varphi))$$

Ora ponendo $f(\theta) = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ dalla precedente segue:

$$f(\theta) \cdot f(\varphi) = f(\theta + \varphi)$$

Osserviamo pertanto che l'argomento di un numero complesso si comporta, nel calcolo formale, come l'esponente di una potenza. Nasce così l'idea di porre (per il momento è soltanto una posizione)

$$\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta = e^{i\theta}$$

Nota come **formula di Eulero**.

Dopo di questa posizione, il numero complesso $z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ si può scrivere $z = \rho e^{i\theta}$. Si ha allora:

$$z \cdot w = \rho e^{i\theta} \cdot r e^{i\varphi} = \rho r e^{i(\theta+\varphi)} \text{ e la nota formula di De Moivre diventa } z^n = \rho^n e^{in\theta}.$$

OMOMORFISMI - ISOMORFISMI

I concetti di omomorfismo ed isomorfismo sono fondamentalmente importanti nell'impostazione della matematica dal punto di vista della "struttura".

Ad esempio, siano dati due gruppi $(A, \circ)$ e $(B, *)$ e sia $f : A \rightarrow B$ un'applicazione biettiva di A in B tale che, detti x, y due elementi qualsiasi di A ed $x' = f(x)$, $y' = f(y)$ gli elementi di B che la f associa ad x e y , si abbia

$$f(x \circ y) = f(x) * f(y)$$

ossia la f fa corrispondere al composto $x \circ y \in A$ il composto $x' * y' \in B$ dei corrispondenti.

In termini approssimativi, possiamo allora affermare che i due gruppi hanno la stessa "struttura", cioè pur essendo diversa la natura degli elementi e la legge di composizione interna, il "funzionamento" rispetto a tali leggi di composizione è il medesimo. Si dice anche che i due gruppi sono **isomorfi**.

Più precisamente abbiamo le seguenti definizioni.

Definizione – Siano $(A, \circ)$ e $(B, *)$ due gruppi ed $f : A \rightarrow B$ un'applicazione di A in B . Si dice che f è un **omomorfismo** di $(A, \circ)$ in $(B, *)$ se per ogni $x, y \in A$ si ha

$$f(x \circ y) = f(x) * f(y)$$

Definizione – Si dice **isomorfismo** un'applicazione biettiva tra due gruppi, tale che, tanto essa quanto la sua inversa siano degli omomorfismi.

In modo analogo si può dare la definizione di omomorfismi dell'anello (risp. corpo o campo) $(A, \circ, *)$ nell'anello (risp. corpo o campo) $(B, \oplus, \otimes)$; in tal caso deve essere:

$$\forall x, y \in A : \quad f(x \circ y) = f(x) * f(y), \quad f(x \oplus y) = f(x) \otimes f(y).$$

Ossia f deve conservare entrambe le leggi di composizione interne.

Se, inoltre, l'applicazione f è biettiva si parla di isomorfismo tra $(A, \circ, *)$ e $(B, \oplus, \otimes)$.

Definizione – Due gruppi (risp. anelli o corpi o campi) si dicono **isomorfi** se fra essi è possibile stabilire un isomorfismo.