

DISPENSA CONTENUTO SCIENTIFICO – DISCIPLINARE

A059 Scienze matematiche, chimiche, fisiche e naturali nella scuola secondaria di primo grado

UNITA' DIDATTICA 1 MATEMATICA

Prefazione pag. 2

Capitolo 1.1

Elementi di logica pag. 4

Elementi di teoria degli insiemi pag. 11

Relazioni e funzioni pag. 16

Capitolo 1.2

Elementi di goniometria e trigonometria pag. 24

Capitolo 1.3

Elementi di calcolo infinitesimale e integrale pag. 43

Questionario 1 pag. 71

UNITA' DIDATTICA 2 SCIENZE

Capitolo 2.1

Elementi di cinematica e calcolo vettoriale pag. 73

Capitolo 2.2

Principi di conservazione pag. 78

Capitolo 2.3

Termodinamica pag. 85

Questionario 2 pag. 91

UNITA' DIDATTICA 3 TEMI SVOLTI DI MATEMATICA

Capitolo 3.1

Concorso ordinario 1984 pag. 93

Capitolo 3.2

Concorso ordinario 1990 pag. 121

Capitolo 3.3

Concorso ordinario 2013 pag. 136

Questionario 3 pag. 141

UNITA' DIDATTICA 4 TEMI SVOLTI DI SCIENZE

Capitolo 4.1

Tema 1 Ambiente pag. 143

Capitolo 4.2

Tema 2 Calore e Temperatura pag. 147

Capitolo 4.3

Tema 3 Sistema periodico e proprietà periodiche pag. 151

Questionario 4 pag. 157

PREFAZIONE

Il presente lavoro rappresenta l'ovvia e naturale prosecuzione di quanto detto, affermato e svolto nella dispensa sulla didattica. Entrambi sono nati dal rapporto diretto con i ragazzi, sono stati elaborati per loro, cuciti addosso ad esperienze / esigenze pratiche e concrete. Questo spiega perché non ho inserito alcuna bibliografia; quanto qui esposto è il risultato di anni di ricerca di materiale didattico di ogni specie: spiegazioni, approcci ed esercitazioni, su testi cartacei e non, adattati, modellati e resi funzionali ad una realtà sempre diversa.

Certamente si noterà nel presente lavoro una certa sproporzione fra quanto qui inserito e i programmi per la scuola secondaria di primo grado. Il motivo è presto detto: si è cercato qui di venire incontro ad una doppia esigenza. Da una parte, infatti, la dispensa è indirizzata a quanti sosterranno il concorso per la scuola secondaria di primo grado, dall'altra però è anche vero che le conoscenze previste in sede concorsuale dall'aspirante docente "volano" ben più in alto.

Scopo anche della presente dispensa, comunque, è quello di far vivere l'esperienza disciplinare come un elemento educativo finalizzato al miglioramento. Si è cercato dunque di evitare ogni eccesso di astrattezza conformandoci allo sviluppo della persona e alle fasi di sviluppo individuali. Solo in questo modo l'azione didattica uscirà dagli angusti e sterili confini dell'istruzione per entrare a pieno titolo in quello dell'educazione.

Educare un allievo significa far collaborare e interagire tutte le sue componenti, la razionalità, ma anche cuore e volontà. Se il nostro obiettivo sarà solo quello di sviluppare la sola facoltà mentale, privilegiando e lavorando prevalentemente sui contenuti, porteremo avanti uno sviluppo e una crescita asimmetrica, disarmonica. Scopo della presente dispensa è invece far emergere l'importanza di nutrire in maniera armonica e simmetrica volontà, pensieri e sentimenti, non focalizzarsi solo sui contenuti ma anche sulla curiosità, l'interesse e la passione.

Si tratta, in definitiva, di prendere gli allievi per mano e, dopo aver nutrito in loro l'essenza della curiosità e del dubbio, agire sul loro senso di curiosità e meraviglia elementi essenziali, come affermava Aristotele, della vera conoscenza.

Prof. Antonino Giardina

(Ordinario di matematica e fisica presso Liceo Scientifico Statale "E. Medi" Barcellona P.G. (ME))

UNITA' DIDATTICA 1: SCIENZE MATEMATICHE

CAPITOLO 1.1

ELEMENTI DI LOGICA ELEMENTI DI TEORIA DEGLI INSIEMI RELAZIONI E FUNZIONI

➤ ELEMENTI DI LOGICA

È ben noto che ogni teoria matematica ha una struttura ipotetico ipotetico – deduttiva, cioè assunte delle premesse, ne trae mediante **ragionamento** delle conclusioni.

La logica è la scienza dei metodi di ragionamenti, pertanto incominciamo questo nostro percorso proprio dalla logica, così, da un lato costruiamo un linguaggio abbastanza chiaro e preciso supporto indispensabile per il resto del nostro cammino e dall'altro chiariamo alcune ambiguità del linguaggio comune.

❖ Logica delle proposizioni

Incominciamo a considerare frasi di un tipo particolare, dette **proposizioni** o **enunciati**, che hanno la caratteristica fondamentale di poter essere riconosciute **vere** o **false**, almeno in un certo contesto.

Esempi: “I poligoni hanno almeno tre lati”, “Pasqua cade sempre di domenica” sono proposizioni vere; “Torino si trova in Lombardia” è una proposizione falsa; “Quanti anni hai?”, “Viva la Juve!” non sono proposizioni nel senso da noi prima precisato.

Nel seguito, i termini “proposizione vera” e “proposizione falsa” verranno rimpiazzate con i simboli “1” e “0” rispettivamente, si suole anche dire che una proposizione vera assume il valore di verità 1 mentre una proposizione falsa assume valore di verità 0.

Connettivi logici

È possibile combinare le proposizioni mediante i cosiddetti **connettivi logici**, nascono così proposizioni più complesse. In logica, si considerano soltanto combinazioni **vero-funzionali**, nelle quali il valore di verità della nuova proposizione dipende dai valori di verità delle proposizioni che la compongono.

I connettivi più elementari sono: “e”, “o” (inclusivo) e “non” essi vengono indicati rispettivamente con i simboli $\wedge$, $\vee$, $\neg$, il loro “funzionamento” viene reso esplicito dalla seguente tabella:

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$\neg a$
1	1	1	1	0
1	0	0	1	0
0	1	0	1	1
0	0	0	0	1

Dove a e b sono due qualunque proposizioni.

Un altro connettivo della logica è quello di **implicazione materiale**, si indica con il simbolo $\rightarrow$ ed è definito dalla seguente tabella:

a	b	$a \rightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Questo connettivo, esprime la possibilità di compiere la deduzione mediante la seguente regola:

Se è vera a e se è vera $a \rightarrow b$, allora è vera b .

Si vede abbastanza facilmente che questo connettivo, può esprimersi mediante i connettivi precedenti, esso può essere interpretato come $\neg a \vee b$, infatti:

Se è vera a e se è vera $\neg a \vee b$, allora è vera b .

Molti teoremi rientrano nello schema seguente: si hanno due proposizioni a e b . a (ipotesi) è supposta vera, quindi si dimostra che è vera la proposizione $a \rightarrow b$; la tavola di verità indica allora che b (tesi) è anch'essa vera (Regola del Modus Ponens).

Si dice che a è sufficiente per il verificarsi di b , mentre b è necessaria per il verificarsi di a .

Un altro connettivo della logica è la **doppia implicazione materiale**, si indica con il simbolo $\leftrightarrow$ ed è definito dalla seguente tabella:

a	b	$a \leftrightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Evidentemente esso equivale a $(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$.

Molti teoremi rientrano nello schema seguente: a e b sono due proposizioni, si dimostra la verità di $a \leftrightarrow b$.

Si dice allora che a è condizione necessaria e sufficiente per il verificarsi di b .

Per dimostrare che $a \leftrightarrow b$ è vera, si procede in due tempi: si dimostra che $a \rightarrow b$ (a funge da ipotesi e b da tesi, cioè a è sufficiente per b) e quindi che $b \rightarrow a$ (b funge da ipotesi, ed a da tesi, a è necessaria per b).

Definizione

Proposizioni logicamente equivalenti

Due proposizioni composte formate dalle stesse proposizioni semplici si dicono **logicamente equivalenti** se hanno la stessa tabella di verità, cioè, se in corrispondenza degli stessi valori di verità delle proposizioni componenti sono entrambe vere o entrambe false. Se p e q sono logicamente equivalenti si scrive $p \leftrightarrow q$.

Osservazione: da non confondere i due simboli $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, il primo è un connettivo logico, date due proposizioni ne fa nascere un'altra, mentre il secondo esprime il fatto che le due proposizioni sono logicamente equivalenti.

Esempi di proposizioni logicamente equivalenti sono:

- $a \Leftrightarrow \neg(\neg a)$;
- $a \wedge b \Leftrightarrow b \wedge a$, proprietà commutativa del connettivo $\wedge$;
- $a \vee b \Leftrightarrow b \vee a$, proprietà commutativa del connettivo $\vee$.

Ancora, le cosiddette **leggi di De Morgan**, sono esempi di proposizioni logicamente equivalenti:

- $\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow \neg a \vee \neg b$;
- $\neg(a \vee b) \Leftrightarrow \neg a \wedge \neg b$.

Si osservi, come nelle leggi di De Morgan, il connettivo di negazione “entra”, nega ogni singola proposizione e “cambia” il connettivo $\wedge$ con $\vee$ nella prima e viceversa $\vee$ con $\wedge$ nella seconda.

Definizione

Tautologie

Vi sono delle proposizioni composte che sono sempre vere, qualunque sia il valore di verità delle proposizioni che le compongono, esse prendono il nome di **tautologie**. Esempi di tautologie sono i 5 esempi presentati sopra e altri esempi notevoli sono i seguenti:

- $a \vee (\neg a)$, legge del terzo escluso;
- $((a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c)$, proprietà transitiva dell’implicazione materiale;
- $(a \rightarrow (\neg a)) \rightarrow (\neg a)$, riduzione all’assurdo;

Definizione

Contraddizioni

Vi sono delle proposizioni composte che sono sempre false, qualunque sia il valore di verità delle proposizioni che le compongono, esse prendono il nome di **contraddizioni**.

Per ottenere esempi di contraddizioni basta prendere una tautologia e negarla, tanto per fissare le idee consideriamo la: $a \vee (\neg a)$ e la neghiamo applicando le leggi di De Morgan.

$$\neg(a \vee (\neg a)) \Leftrightarrow (\neg a) \wedge (\neg(\neg a)) \Leftrightarrow \neg a \wedge a \Leftrightarrow a \wedge (\neg a);$$

dunque abbiamo ottenuto:

- $a \wedge (\neg a)$, legge di contraddizione.

Altre due equivalenze logiche importanti sono le seguenti:

- $(a \rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg b \rightarrow \neg a)$;
- $(a \wedge (\neg b)) \rightarrow c$ con c contraddizione.
- Queste equivalenze logiche saranno usate nelle dimostrazione di teoremi per “assurdo”: ossia quando per provare che $a \rightarrow b$ è vera, risulta più facile dimostrare che è vera $\neg b \rightarrow \neg a$ o che è vera $(a \wedge (\neg b)) \rightarrow c$ con c contraddizione.

La veridicità delle relazioni viste prima, può essere dimostrata mediante le relative tabelle di verità, vediamo di dimostrarne qualcuna. Dimostriamo la legge del terzo escluso ossia che la $a \vee (\neg a)$ è una tautologia:

a	$\neg a$	$a \vee \neg a$
1	0	1
0	1	1

Si vede appunto che nella colonna di $a \vee (\neg a)$ compaiono tutti 1. Analogamente si dimostra che $a \wedge (\neg a)$ è una contraddizione:

a	$\neg a$	$a \wedge (\neg a)$
1	0	0
0	1	0

Infatti nella colonna di $a \wedge (\neg a)$ compaiono tutti 0.

Dimostriamo ora l'equivalenza logica $(a \rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg b \rightarrow \neg a)$:

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$a \rightarrow b$	$\neg b \rightarrow \neg a$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

Infatti le colonne di $a \rightarrow b$ e $\neg b \rightarrow \neg a$ sono uguali.

Lo scrivente, ancora studente al primo anno di università, si chiedeva a cosa servisse la logica in matematica. Si presenteranno ora alcuni esempi concreti di dimostrazioni e fra queste, quella che ha fatto capire allo scrivente, l'importanza, oserei dire "vitale", della logica, in matematica.

Teorema

Se il quadrato di un numero naturale è pari, allora anche il numero naturale è pari. In

simboli: $p \in N, p^2 \text{ pari} \Rightarrow p \text{ pari}$.

Dim.:

Dimostrare l'asserto, alla luce dell'equivalenza logica $a \rightarrow b \Leftrightarrow \neg b \rightarrow \neg a$, equivale a dimostrare quanto segue:

se un numero naturale **non è pari** (dispari), allora il suo quadrato **non è pari** (dispari). In simboli: $p \in N, p \text{ dispari} \Rightarrow p^2 \text{ dispari}$. Osserviamo che un qualunque numero dispari può porsi sotto la forma $2k+1$ con $k \in N$, cioè p dispari significa che esiste un opportuno numero naturale, chiamiamolo pure k , tale da aversi $p = 2k+1$ (3 è dispari e può scriversi $3 = 2 \cdot 1 + 1$, cioè esiste $k = 1$ tale che $3 = 2 \cdot 1 + 1$). In simboli: $p \text{ dispari} \Leftrightarrow \exists k \in N : p = 2k + 1$, dopo di che si ha:

$p^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$, dunque risulta $p^2 \text{ dispari}$, essendo $4k^2$ pari, $4k$ pari e 1 dispari; C.V.D..

Teorema

Non esiste nessuna frazione che moltiplicata per se stessa dia 2. In simboli: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Dim.:

Supponiamo per assurdo che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, cioè che esistono due numeri naturali, chiamiamoli p e q , con q diverso da zero, tali che: $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. Osserviamo che non è restrittivo supporre p e q primi fra

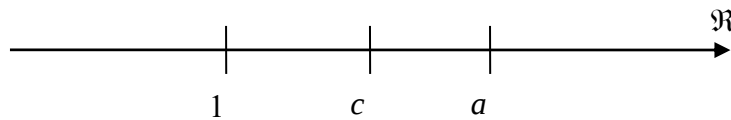
loro, siano allora p e q primi tra loro; da $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$; segue: $\frac{p^2}{q^2} = 2$; ossia: $p^2 = 2q^2$; pertanto p^2 risulta pari, essendo uguale al doppio di q^2 , quindi alla luce del teorema prima dimostrato sarà anche p pari; cioè p è del tipo: $p = 2k$, allora da: $p^2 = 2q^2$ segue: $(2k)^2 = 2q^2$, ossia: $4k^2 = 2q^2$, e quindi $2k^2 = q^2$, cioè q^2 pari, che per la “solita” dimostrazione significa q pari, contro il fatto che p e q sono primi fra loro (contraddizione), dunque $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; C.V.D..

Lemma

Comunque prendiamo un numero reale a maggiore di 1 esiste almeno un altro un numero reale b maggiore di 1 tale che: $b^2 \leq a$. In simboli: $\forall a \in \mathbb{R}, a > 1 \exists b \in \mathbb{R}, b > 1: b^2 \leq a$.

I simboli $\forall$ e $\exists$ verranno presentati nelle pagine seguenti, per ora ci limitiamo a dire che traducono rispettivamente le frasi della lingua italiana **per ogni** e **esiste almeno**.

Dim.:



Preso un numero c come in figura, cioè $1 < c < a$ si ha che: c oppure $\frac{a}{c}$ è un b , cioè:

$$c^2 \leq a \quad \vee \quad \left(\frac{a}{c}\right)^2 \leq a. \quad (1)$$

In caso contrario, negando cioè la (1) utilizzando una delle **legge di De Morgan**, si ha:

$$c^2 > a \quad \wedge \quad \left(\frac{a}{c}\right)^2 > a. \quad (2)$$

Ora, se moltiplichiamo membro a membro e svolgiamo i calcoli si ha:

$$c^2 \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^2 > a \cdot a \quad \text{cioè:} \quad c^2 \cdot \frac{a^2}{c^2} > a^2 \quad \text{ossia:} \quad a^2 > a^2.$$

Evidentemente la: $a^2 > a^2$ è una contraddizione, in quanto un numero non può essere maggiore di se stesso, la contraddizione nasce dall'aver supposto vera la (2) pertanto la (2) è falsa, ma la (2) è la negazione della (1) dunque la (1) è vera. C.V.D..

Lo scrivente, con questa dimostrazione, ha capito a suo tempo l'importanza della logica, in matematica.

Questo lemma, sostanzialmente, è un lemma preparatorio, cioè serve per dimostrare un teorema più “grosso”, quello dell'esistenza della radice quadrata nell'insieme dei numeri reali.

❖ Logica dei predicati

Generalizziamo ora la nozione di proposizione introducendo certe affermazioni logiche contenente delle “variabili”.

Sia X un insieme (vedasi più avanti il paragrafo elementi teoria degli insiemi) e sia a un elemento ben definito di tale insieme. Per evidenziare che una proposizione è relativa a l'elemento a scriviamo: $p(a)$. Ancora, se abbiamo due insiemi X e Y ed indichiamo con a e b due elementi ben definiti X e Y rispettivamente, una proposizione relativa a tali elementi la indichiamo: $p(a,b)$. Se ora indichiamo con x e y elementi qualsiasi degli insiemi X e Y rispettivamente, allora le espressioni:

$$p(x), p(x,y);$$

sono delle espressioni determinate, ossia con un ben determinato valore di verità, quando le **variabili** x e y vengono rimpiazzate con delle **costanti**, cioè con degli elementi ben definiti degli insiemi X e Y .

Esempi

- X insieme degli italiani, a Galileo Galilei, allora $p(a)$, ossia: $p(\text{Galileo Galilei})$ potrebbe essere: *Galileo Galilei è uno Scienziato*; che è una proposizione con un ben determinato valore di verità, in questo caso 1;
- X insieme degli italiani, $p(x)$, potrebbe essere: *x è uno Scienziato*; questa frase non ha un ben determinato valore di verità.
- Ancora, X insieme degli italiani, Y insieme dei numeri naturali, a Galileo Galilei, b il numero 2015 allora $p(a,b)$, ossia: $p(\text{Galileo Galilei}, 2015)$ potrebbe essere: *Galileo Galilei è nato nel 2015*; che è una proposizione con un ben determinato valore di verità, in questo caso 0.

Predicati

Espressioni come:, $p(x,y): x \text{ è nato nell'anno } y$ sono delle **espressioni indeterminate**, non hanno cioè un valore di verità intrinseco: infatti, il loro valore di verità dipende dai valori che si attribuiscono alle variabili. Queste espressioni, vengono dette **predicati**.

Si dice anche il predicato in una variabile, $p(x)$, esprime una **proprietà** di x ; il predicato in due variabili, $p(x,y)$, esprime una **relazione** tra x ed y .

Quantificatori

Come già osservato, quando in un predicato tutte le variabili vengono rimpiazzate con costanti, si ottiene una proposizione determinata, cioè con un ben determinato valore di verità.

Un'altra via per poter **quantificare** un predicato, cioè trasformarlo in una proposizione determinata e quindi associare ad esso un valore di verità, consiste nell'utilizzazione di tanti **quantificatori** quante sono le variabili che in esso compaiono.

I quantificatori sono di due tipi: **quantificatore universale** ($\forall$) e **quantificatore esistenziale** ($\exists$).

Quantificatore universale

Sia $p(x)$ un predicato che assume i valori 1 o 0 per ogni elemento x dell'insieme X . Allora con l'espressione: $\forall x : p(x)$, che si legge “per ogni” x , $p(x)$ è vera, si indica “una proposizione che è vera quando $p(x)$ è vera per tutti gli elementi x dell'insieme X , e falsa in caso contrario”.

Quantificatore esistenziale

Con l'espressione $\exists x : p(x)$, che si legge “esiste almeno” un x per il quale $p(x)$ è vera, si indica “una proposizione che è vera quando esiste almeno un elemento x dell'insieme X , per il quale $p(x)$ è vera, e falsa in caso contrario”.

Osserviamo che le espressioni $\forall x : p(x)$ e $\exists x : p(x)$ non dipendono da x ; i quantificatori $\forall$ e $\exists$ si dicono **duali** l'uno dell'altro.

Esempi

- X insieme degli italiani, $p(x): x \text{ è uno Scienziato}$, questa frase, come abbiamo già visto, non ha un ben determinato valore di verità, ma la seguente $\exists x : p(x)$, cioè “esiste almeno un italiano scienziato” sì, e precisamente ha valore di verità 1;
- X insieme degli italiani, Y insieme dei numeri naturali, $p(x, y): x \text{ è nato nell'anno } y$, questa frase non ha un ben determinato valore di verità, ma la seguente $\forall x \exists y : p(x, y)$, cioè “per ogni italiano esiste almeno un anno in cui è nato” sì, e precisamente ha valore di verità 1;
- X insieme degli italiani, Y insieme dei numeri naturali, $p(x, y): x \text{ è nato nell'anno } y$, questa frase non ha un ben determinato valore di verità, ma la seguente $\exists x \forall y : p(x, y)$, cioè “esiste almeno un italiano che è nato ogni anno” sì, e precisamente ha valore di verità 0;
- X insieme dei numeri naturali, Y insieme dei numeri naturali, $p(x, y): x < y$, questa frase non ha un ben determinato valore di verità, ma la seguente $\exists x \exists y : p(x, y)$, cioè “esiste almeno un numero naturale minore di un altro numero naturale” sì, e precisamente ha valore di verità 1.

Negazione dei predicati quantificati

Una regola importante che riguarda la negazione dei predicati quantificati è la seguente:

$$\neg(\forall x : p(x)) \Leftrightarrow \exists x : \neg p(x);$$

cioè la negazione “entra” trasforma il quantificatore $\forall$ nel suo duale $\exists$ e nega il predicato.

Analogamente si ha: $\neg(\exists x : p(x)) \Leftrightarrow \forall x : \neg p(x)$.

Vale anche la seguente regola: $\neg(\forall x \exists y : p(x, y)) \Leftrightarrow \exists x, \forall y : \neg p(x, y)$.

Esempi

- X insieme degli italiani, $p(x): x \text{ è uno Scienziato}$, $\neg(\exists x : p(x)) \Leftrightarrow \forall x : \neg p(x)$, infatti negare che “esiste almeno un italiano scienziato” equivale ad affermare “ogni italiano non è scienziato”
- X insieme dei numeri naturali, Y insieme dei numeri naturali, $p(x, y): x < y$, $\neg(\forall x \exists y : p(x, y)) \Leftrightarrow \exists x, \forall y : \neg p(x, y)$, infatti, negare che “ogni numero nat. x è minore di almeno un fissato numero nat. y ” equivale ad affermare che “esiste almeno un numero nat. x tale che comunque si sceglie un altro numero nat. y risulta $x \geq y$ ”.

➤ ELEMENTI DI TEORIA DEGLI INSIEMI

Assumiamo la nozione di **insieme** come primitiva. Un insieme si concepisce in quanto costituito dai suoi **elementi**, assumiamo come primitiva anche la nozione di elemento di un insieme.

Conveniamo di indicare gli insiemi con lettere maiuscole ed i loro elementi con lettere minuscole. Se X è un insieme ed x un suo elemento scriviamo:

$$x \in X$$

da leggersi “ x appartiene all’insieme X ” o “ x è un elemento di X ”; mentre scriviamo:

$$x \notin X$$

per negare la relazione precedente, cioè per affermare che “ x non appartiene all’insieme X ”.

Per indicare un insieme basta allora, quando è possibile, elencarne ad esempio dentro parentesi graffa, tutti i suoi elementi. Così se $x, y, z, \dots$ sono gli elementi di X scriviamo:

$$X = \{x, y, z, \dots\}.$$

Definizione

Dati due insiemi A e B ; diciamo che “ A è **contenuto in** B ”, o che “ B **contiene** A ”, o che “ A è un **sottoinsieme** di B ”, se ogni elemento di A è un elemento di B e scriviamo $A \subseteq B$.

Questa relazione è detta di **inclusione**. In simboli: $A \subseteq B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall x: x \in A \Rightarrow x \in B)$.

Se valgono contemporaneamente $A \subseteq B$, $B \subseteq A$ diciamo che A è **uguale** a B e scriviamo $A = B$; in simboli: $A = B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall x: x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

Per affermare che $A \subseteq B \wedge A \neq B$, cioè esistono elementi di B che non sono elementi di A , scriviamo $A \subset B$ e diciamo che “ A è **contenuto propriamente** in B ” o che “ A è **sottoinsieme proprio** di B ”.

Valgono le seguenti proprietà:

- $A \subseteq A$ proprietà riflessiva della relazione di inclusione;
- $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ proprietà transitiva della relazione di inclusione;
- $A = A$ proprietà riflessiva della relazione di uguaglianza;
- $A = B \Rightarrow B = A$ proprietà simmetrica della relazione di uguaglianza;
- $A = B, B = C \Rightarrow A = C$ proprietà transitiva della relazione di uguaglianza.

Definizione

Risulta interessante considerare come insieme anche l’insieme privo di elementi, esso viene chiamato **insieme vuoto** e si indica con il simbolo $\emptyset$.

L’insieme vuoto può essere concepito come sottoinsieme di un qualunque altro insieme. Dunque preso un qualunque insieme X , risulta $\emptyset \subseteq X$.

Per dimostrarlo ricordiamo la definizione di sottoinsieme $A \subseteq B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall x: x \in A \Rightarrow x \in B)$ dunque per far vedere che A non è sottoinsieme di B dobbiamo negare $(\forall x: x \in A \Rightarrow x \in B)$ ed utilizzando le regole per la negazione dei predicati quantificati si ha: $\neg(\forall x: x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow \exists x: x \in A \wedge x \notin B$, cioè deve esistere almeno un elemento che appartiene ad A e non appartiene a B , dunque per negare che $\emptyset \subseteq X$, dobbiamo trovare un elemento che appartiene all’insieme vuoto che non appartiene a X ma questo è impossibile farlo perché l’insieme vuoto è privo di elementi, dunque deve essere necessariamente $\emptyset \subseteq X$.

Definizione

Se X è un insieme, esiste un unico insieme i cui elementi sono tutti e soli i sottoinsiemi di X ; esso viene chiamato **insieme delle parti di X** e viene indicato con il simbolo $P(X)$. Si ha:

$$\emptyset \in P(X), \quad X \in P(X).$$

Valgono inoltre le seguenti equivalenze:

$$x \in X \Leftrightarrow \{x\} \in P(X), \quad Y \subseteq X \Leftrightarrow Y \in P(X).$$

Cerchiamo di chiarire alcuni fatti: $\{x\}$ è l'insieme il cui unico elemento è x quindi $\{x\} \subseteq X$ e pertanto $\{x\} \in P(X)$. Ancora, $\{\emptyset\}$ è l'insieme il cui unico elemento è l'insieme vuoto, quindi $\{\emptyset\}$ non è vuoto, ma possiede un elemento, appunto l'insieme vuoto.

Esempio

Sia $X = \{a, b, c\}$ i suoi sottoinsiemi sono:

$$X_1 = \emptyset, X_2 = \{a\}, X_3 = \{b\}, X_4 = \{c\}, X_5 = \{a, b\}, X_6 = \{a, c\}, X_7 = \{b, c\}, X_8 = X;$$

cioè 8, in generale se gli elementi di un insieme sono n si può dimostrare che i sottoinsiemi sono 2^n , nel nostro caso appunto essendo $n = 3$ si hanno $2^3 = 8$ sottoinsiemi. Pertanto, l'insieme delle parti di X è formato da:

$$P(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

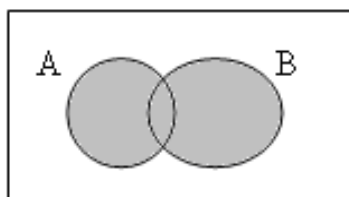
❖ Operazioni nell'insieme $P(X)$

Nell'insieme $P(X)$ si possono definire alcune operazioni insiemistiche fondamentali.

Definizione

Siano X un insieme, $P(X)$ l'insieme delle parti di x , $A, B \in P(X)$, si chiama **unione** dei due insiemi A e B , e si indica $A \cup B$, l'insieme degli elementi di X che appartengono ad almeno uno dei due insiemi A e B . In simboli:

$$A \cup B \stackrel{def.}{=} \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}.$$

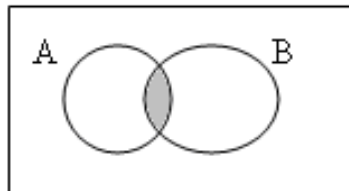


Nel grafico sopra, il rettangolo rappresenta l'insieme X così pure in quelli che seguono.

Definizione

Siano X un insieme, $P(X)$ l'insieme delle parti di x , $A, B \in P(X)$, si chiama **intersezione** dei due insiemi A e B , e si indica $A \cap B$, l'insieme degli elementi di X che appartengono ad entrambi gli insiemi A e B . In simboli:

$$A \cap B \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}.$$



Definizione

Siano X un insieme, $P(X)$ l'insieme delle parti di x , $A, B \in P(X)$, se $A \cap B = \emptyset$ ossia A e B non hanno elementi in comune, si dice che A e B sono **disgiunti**.



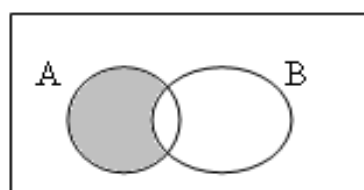
Dalle definizioni seguono varie proprietà di facile dimostrazione.

- $A \cup A = A$, $A \cap A = A$;
- $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Definizione

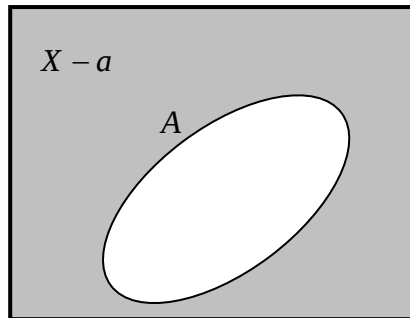
Siano X un insieme, $P(X)$ l'insieme delle parti di x , $A, B \in P(X)$, si chiama **differenza** di B da A , e si indica con $A - B$, l'insieme degli elementi di A che non appartengono B . In simboli:

$$A - B \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \in X : x \in A \wedge x \notin B\}.$$



Come caso particolare si può considerare la differenza $X - A$, detta **complementare** di A rispetto ad X , e si indica: $C_X A$ o anche A'_X o semplicemente A' o anche con $\bar{A}$ (queste ultime due notazioni quando non nascono ambiguità). In simboli:

$$C_X A \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \in X : x \notin A\}.$$



Valgono le seguenti proprietà:

- $X' = \emptyset$, $\emptyset' = X$, $(A')' = A$;
- $A \cup A' = X$, $A \cap A' = \emptyset$;
- $(A \cup B)' = A' \cap B'$;
- $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Le ultime due proprietà sono le due leggi di De Morgan per gli insiemi, da notare l'analogia con le due leggi di De Morgan viste in logica.

Presentiamo ora, lo svolgimento di un esercizio sugli insiemi, fornendo due “versioni” una più “elementare e discorsiva” e l'altra rigorosa.

Esercizio

Due insiemi X ed Y sono tali che esiste un terzo insieme Z tale che:

$$X \cap Z = Y \cap Z \text{ e } X \cup Z = Y \cup Z.$$

Si dimostri che $X = Y$.

Versione “elementare e discorsiva”

Dimostrazione:

due insiemi X ed Y , sono uguali, se riesce contemporaneamente X sottoinsieme di Y e viceversa, in simboli: $X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X$; dimostriamo che $X \subseteq Y$, **ossia che ogni elemento x di X , appartiene anche ad Y** , in simboli: $\forall x \in X \Rightarrow x \in Y$.

Comunque prendiamo **un elemento di X , chiamiamolo x** , si ha che questo elemento x , si trova anche nell'unione di X con Z , cioè si trova in $X \cup Z$, infatti l'unione di due insieme, è formata dagli elementi che stanno: o in uno, o nell'altro o in entrambi gli insiemi; pertanto essendo x un elemento di X abbiamo anche che $x \in X \cup Z$.

Essendo inoltre per ipotesi $X \cup Z = Y \cup Z$ si ha anche che $x \in Y \cup Z$ cioè x si trova anche nell'unione di Y con Z ; pertanto per definizione di unione si ha: o che x si trova in Y (in questo caso avremmo finito) o x si trova in Z o che x si trova sia in Y sia in Z (in questo caso avremmo finito anche);

supponiamo allora che x si trovi in Z , dunque x essendo sia un elemento di X (infatti x è stato preso inizialmente da noi in X) sia un elemento di Z , per definizione di intersezione di due insiemi, x si trova anche in $X \cap Z$ cioè, $x \in X \cap Z$, infatti l'intersezione di due insiemi, è formata dagli elementi che stanno sia in uno sia nell'altro insieme.

Essendo inoltre per ipotesi $X \cap Z = Y \cap Z$ si ha anche che $x \in Y \cap Z$ cioè x si trova anche nell'intersezione di Y con Z ; pertanto per definizione di intersezione si ha che: x si trova sia in Y sia in Z , dunque in particolare a noi interessa sottolineare che **x si trova in Y** .

Sostanzialmente possiamo affermare, che in ogni caso, prendendo un elemento x di X , questo elemento x si ritrova anche in Y ; C.V.D.. Mutatis mutandis si dimostra che $Y \subseteq X$.

Versione “rigorosa”

Dimostrazione:

due insiemi X ed Y , sono uguali, se riesce contemporaneamente X sottoinsieme di Y e viceversa, in simboli:

$$X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X ;$$

dimostriamo che $X \subseteq Y$, ossia che ogni elemento x di X , appartiene anche ad Y , in simboli:

$$\forall x \in X \Rightarrow x \in Y ;$$

$$\forall x \in X \stackrel{(1)}{\Rightarrow} x \in X \cup Z \stackrel{(2)}{\Rightarrow} x \in Y \cup Z \stackrel{(3)}{\Rightarrow} x \in Y \vee x \in Z$$

se $x \in Y$ avremmo finito, supponiamo allora che $x \in Z$, quindi da $x \in X \wedge x \in Z$ segue per definizione di intersezione:

$$x \in X \cap Z \stackrel{(4)}{\Rightarrow} x \in Y \cap Z \stackrel{(5)}{\Rightarrow} x \in Y \wedge x \in Z \text{ quindi in particolare } x \in Y \text{ c.v.d..}$$

Mutatis mutandis si dimostra che $Y \subseteq X$.

- (1) Per definizione di unione.
- (2) Essendo per ipotesi $X \cup Z = Y \cup Z$.
- (3) Per definizione di unione.
- (4) Essendo per ipotesi $X \cap Z = Y \cap Z$.
- (5) Per definizione di intersezione.

➤ RELAZIONI E FUNZIONI

Siano dati due insiemi $A, B \in P(X)$, assumiamo come primitiva la nozione di **coppia ordinata** (o semplicemente coppia) (a, b) con $a \in A, b \in B$.

Osservazione: Esiste differenza fra la coppia (a, b) e l'insieme $\{a, b\}$, costituito dai due elementi a e b . L'insieme $\{a, b\}$ può essere indicato anche con $\{b, a\}$ in quanto non ha importanza l'ordine con cui sono elencati gli elementi di un insieme: si ha dunque: $\{a, b\} = \{b, a\}$; mentre per due coppie ordinate risulta:

$$[(a, b) = (c, d)] \Leftrightarrow [a = c \wedge b = d].$$

Definizione

Dati due insiemi $A, B \in P(X)$, si chiama **prodotto cartesiano** (o semplicemente **prodotto**) di A per B , e si indica con $A \times B$, l'insieme di tutte le coppie ordinate (x, y) con $x \in A, y \in B$. In simboli:

$$A \times B \stackrel{\text{def.}}{=} \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}.$$

Esempio

Dati $A = \{x | x \text{ è un mult. di } 2 \text{ e } x < 4\}$ e $B = \{x | x \text{ è dispari e } x < 7\}$, calcolare $A \times B$.

Svolgimento: Scriviamo i due insiemi elencando i loro elementi, quindi abbiamo: $A = \{0, 2\}$, $B = \{1, 3, 5\}$. Quindi abbiamo: $A \times B = \{(0, 1); (0, 3); (0, 5); (2, 1); (2, 3); (2, 5)\}$.

Definizione

Abbiamo già usato il termine “**relazione**” per indicare un predicato in due variabili.

Siano $A, B \in P(X)$ due insiemi $\mathfrak{R}(x, y)$ un predicato relativo agli elementi di $A \times B$. Possiamo considerare l'insieme

$$\mathfrak{R}(x, y) = \{(x, y) \in A \times B : \mathfrak{R}(x, y)\}$$

cioè il sottoinsieme $\mathfrak{R}$ di $A \times B$ costituito da tutte le coppie che rendono vera la “relazione”. Esso viene detto **grafico** della relazione. Viceversa, se consideriamo un sottoinsieme $\mathfrak{R}$ di $A \times B$, risulta individuata una “relazione” $\mathfrak{R}$, tra A e B di cui esso è grafico, nel senso che un elemento $x \in A$ e un elemento $y \in B$ sono nella “relazione” stabilita da $\mathfrak{R}$ se e solo se $(x, y) \in \mathfrak{R}$.

Osserviamo che è stato usato lo stesso simbolo per indicare una relazione ed il suo grafico: scriviamo indifferentemente $(x, y) \in \mathfrak{R}$ o $\mathfrak{R}(x, y)$. Si usa anche la scrittura $x \mathfrak{R} y$ per indicare che $(x, y) \in \mathfrak{R}$. Nel grafico seguente, il rettangolo rappresenta il prodotto $A \times B$.

Qualche volta useremo il simbolo $G(\mathfrak{R})$ per indicare il grafico di $\mathfrak{R}$.

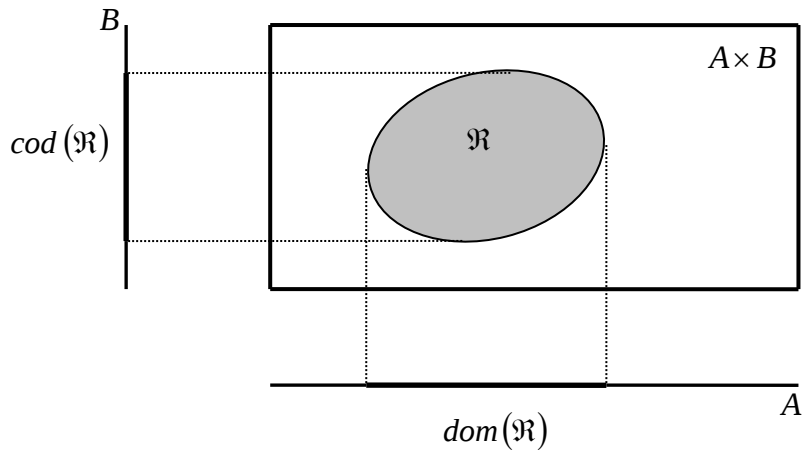
Definizione

Si chiama **dominio** della relazione $\mathfrak{R}$ e si indica con $\text{dom}(\mathfrak{R})$ l'insieme definito da:

$$\text{dom}(\mathfrak{R}) \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \in A : \exists y \in B \wedge (x, y) \in \mathfrak{R}\}.$$

Si chiama **codominio** della relazione $\mathfrak{R}$ e si indica con $\text{cod}(\mathfrak{R})$ l'insieme definito da:

$$\text{cod}(\mathfrak{R}) \stackrel{\text{def.}}{=} \{y \in B : \exists x \in A \wedge (x, y) \in \mathfrak{R}\}.$$



Esempio

Sia R l'insieme dei numeri reali (vedasi capitolo sugli insiemi numerici) indichiamo il prodotto $R \times R$ con R^2 , ebbene, in R^2 consideriamo la relazione $\mathfrak{R}$ data da:

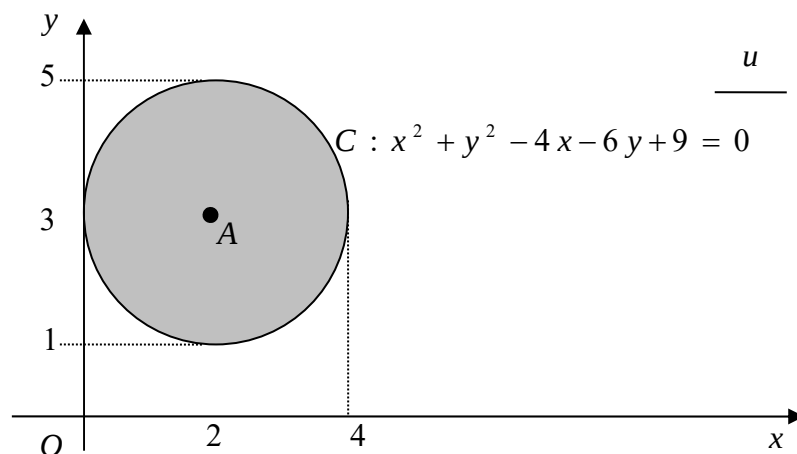
$$\mathfrak{R} = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 \leq 0\}$$

e rappresentiamo il suo grafico individuandone dominio e codominio.

Il lettore nel paragrafo relativo alla geometria analitica, scoprirà che, la circonferenza C di centro il punto $A(2,3)$ e raggio $r = 2$, avrà equazione: $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$, nel senso che: un punto appartiene a C , **se e soltanto se** le sue coordinate soddisfano l'eq. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$. Così, per esempio, il punto $P(4,3)$ appartenendo evidentemente alla circonferenza C (vedasi figura sotto) ha coordinate tali da soddisfare l'equazione $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$, infatti, si ha: $4^2 + 3^2 - 4 \cdot 4 - 6 \cdot 3 + 9 = 0 \Rightarrow 16 + 9 - 16 - 18 + 9 = 0 \Rightarrow 0 = 0$. Ciò premesso, i punti per i quali risulta $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 \leq 0$ sono tutti quelli della citata circonferenza e quelli ad essa interni. Come si vede dal grafico seguente, si ha:

$$\text{dom}(\mathfrak{R}) = \{x \in R : \exists y \in R \wedge x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 \leq 0\} = [0, 4];$$

$$\text{cod}(\mathfrak{R}) = \{y \in R : \exists x \in R \wedge x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 \leq 0\} = [1, 5].$$



❖ Relazioni di equivalenza

In questo paragrafo e nel successivo esamineremo alcune proprietà di relazioni (binarie) definite tra gli elementi di uno stesso insieme.

Definizione

Sia A un insieme non vuoto ed $\mathcal{R}(x, y)$ una relazione definita in $A \times A$; si dice che $\mathcal{R}$ è una **relazione di equivalenza** se gode delle seguenti proprietà:

- riflessiva: $\forall x \in A \Rightarrow (x, x) \in \mathcal{R}$;
- simmetrica: $\forall x, y \in A : (x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{R}$;
- transitiva: $\forall x, y, z \in A : (x, y) \in \mathcal{R} \wedge (y, z) \in \mathcal{R} \Rightarrow (x, z) \in \mathcal{R}$.

Spesso quando si tratta di una relazione di equivalenza, invece di scrivere $(x, y) \in \mathcal{R}$ o $\mathcal{R}(x, y)$ è vera si scrive $x \equiv y$ (o con più precisione $x \equiv y \pmod{\mathcal{R}}$) e si legge “ x equivalente a y ”.

Definizione

Sia A un insieme non vuoto dotato di una relazione di equivalenza $\mathcal{R}$, per ogni $x \in A$ indichiamo con $[x]$ il sottoinsieme di A formato dagli elementi di A equivalenti a x . Tali sottoinsiemi si dicono **classi di equivalenza** di A rispetto alla relazione $\mathcal{R}$. In simboli:

$$[x] \stackrel{\text{def.}}{=} \{y \in A : y \equiv x\}.$$

Vale il seguente teorema di cui omettiamo la dimostrazione.

Teorema

Due classi di equivalenza o coincidono o sono disgiunte.

Definizione

Consideriamo ora l'insieme F di tutte le classi di equivalenza di A rispetto alla relazione $\mathcal{R}$. F è un sottoinsieme di $P(A)$ con le seguenti proprietà:

- $\forall B \in F \Rightarrow B \neq \emptyset$, cioè ogni classe di equivalenza è non vuota;
- $\forall B, C \in F, B \cap C \neq \emptyset \Rightarrow B = C$, cioè se due classi di equivalenza hanno qualche elemento in comune coincidono;
- $\bigcup_{B \in F} B = A$, cioè l'unione di tutte le classi di equivalenza è uguale ad A .

Una famiglia F di sottoinsiemi di A che verifica le tre proprietà precedenti si dice una **partizione** di A .

Definizione

Sia A un insieme non vuoto dotato di una relazione di equivalenza $\mathfrak{R}$, l'insieme costituito da tutte le classi di equivalenza di A rispetto alla relazione $\mathfrak{R}$ viene chiamato **insieme quoziente** di A rispetto alla relazione di equivalenza $\mathfrak{R}$ e si indica col simbolo $A_{/\mathfrak{R}}$.

Viceversa, data una partizione F di A , resta definita la relazione di equivalenza $\mathfrak{R}$ tale che $F = A_{/\mathfrak{R}}$; essa è tale che:

$$x \equiv y \Leftrightarrow \exists B \in F \wedge x, y \in B;$$

cioè:

$$\mathfrak{R} \stackrel{\text{def.}}{=} \{(x, y) \in A \times A : \exists B \in F \wedge x, y \in B\}$$

Esempio

Prendiamo in esame la cosiddetta aritmetica dell'orologio, cioè riteniamo "equivalenti" nell'insieme dei numeri naturali i numeri: 0, 12, 24, 36, 48, ...; i numeri: 1, 13, 25, 37, 49, ...; i numeri: 2, 14, 26, 38, 50, ...; ...; 11, 23, 35, 47, 59, ... In altri termini riteniamo equivalenti i numeri che hanno lo stesso resto rispetto alla divisione per 12. Per esempio, $14 \equiv 38$ (14 equivalente a 38) perché le due divisioni $14:12$ e $38:12$ hanno lo stesso resto 2. Evidentemente la relazione definita è di equivalenza, in quanto valgono le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva. Pertanto se consideriamo le classi dei numeri fra loro equivalenti, si formano 12 sottoinsiemi di N che costituiscono una partizione di N e vengono anche detti **classi resto modulo 12**. L'insieme **quoziente**, è costituito da questi dodici sottoinsiemi. Per chiarire meglio, indichiamo i 12 sottoinsiemi così:

$$[0] = \{0, 12, 24, 36, 48, \dots\}; [1] = \{1, 13, 25, 37, 49, \dots\}; \dots; [11] = \{11, 23, 35, 47, 59, \dots\}.$$

Indichiamo l'insieme quoziente così: $N_{12} = \{[0], [1], \dots, [11]\}$, evidentemente l'insieme quoziente possiede 12.

❖ Relazioni d'ordine

Definizione

Sia A un insieme non vuoto ed $\mathfrak{R}(x, y)$ una relazione definita in $A \times A$; si dice che $\mathfrak{R}$ è una **relazione d'ordine** (o ordinamento) se gode delle seguenti proprietà:

- transitiva: $\forall x, y, z \in A : (x, y) \in \mathfrak{R} \wedge (y, z) \in \mathfrak{R} \Rightarrow (x, z) \in \mathfrak{R}$;
- antisimmetrica: $\forall x, y \in A : (x, y) \in \mathfrak{R} \Rightarrow (y, x) \notin \mathfrak{R}$.

Spesso quando si tratta di una relazione d'ordine, invece di scrivere $(x, y) \in \mathfrak{R}$ o $\mathfrak{R}(x, y)$ è vera si scrive:

$$x < y \text{ o } y > x$$

e si legge " x precede y " o " y segue x ".

❖ Funzioni

In questo paragrafo esaminiamo una classe importante di relazioni tra insiemi: le **funzioni** (o **applicazioni**)

Definizione

Siano A e B due insiemi non vuoti ed $f \subset A \times B$ una relazione tra A e B . Si dice che f è una **funzioni** (o **applicazioni**) se sono verificate le due condizioni seguenti:

- $\text{dom}(f) = A$;
- $(x, y') \in f \wedge (x, y'') \in f \Rightarrow y' = y''$.

Tale definizione è del tutto equivalente alla seguente:

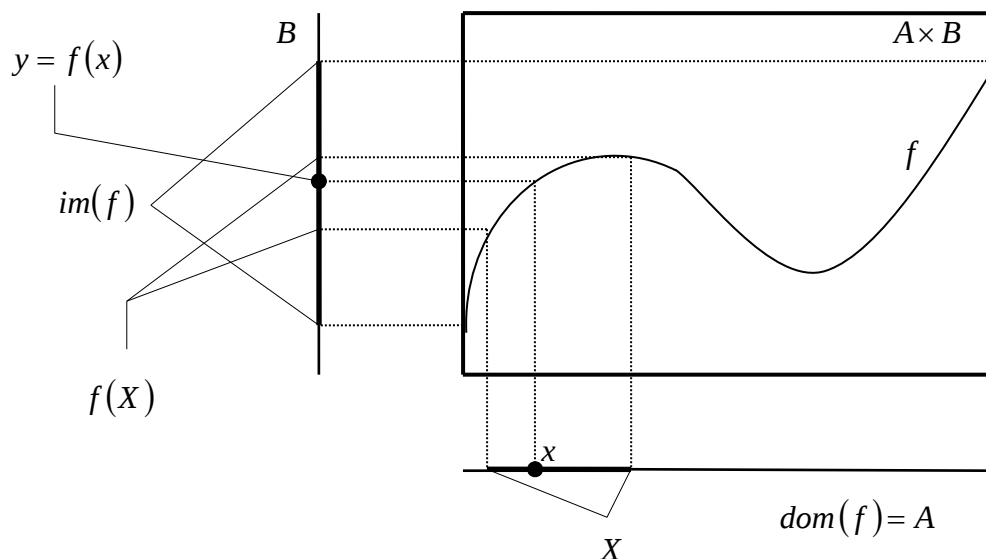
Definizione

Una relazione f definita tra A e B si dice **funzioni** (o **applicazioni**) di A in B , se per ogni $x \in A$ esiste uno e un solo $y \in B$ tale che $(x, y) \in f$. In simboli: $\forall x \in A \exists! y \in B: (x, y) \in f$.

Per le funzioni si usa anche scrivere $f: A \rightarrow B$, o anche $A \rightarrow B$ e si legge “ f è una funzione di A in B ”. Ancora, per ogni $x \in A$ l'unico elemento $y \in B$ tale che $(x, y) \in f$ si dice **valore** di f in x (o anche l'**immagine** di x mediante f) e si indica con $f(x)$, da leggersi “effe di x ”; si dice anche che f fa corrispondere all'elemento $x \in A$ l'immagine $f(x) \in B$.

Definizione

Se $X \subseteq A$ si chiama **immagine** (o **immagina diretta**) di X mediante f l'insieme $f(X)$ così definito $f(X) \stackrel{\text{def.}}{=} \{y \in B: \exists x \in X \wedge y = f(x)\}$ o in modo equivalente $f(X) = \{f(x): x \in X\}$ evidentemente risulta $f(X) \subseteq B$. In particolare $f(A) = \text{cod}(f)$ si chiama **immagine** di f e può essere indicata anche con $\text{im}(f)$.



Definizione

Se $Y \subseteq B$ si chiama **controimmagine** (o **immagina reciproca**) di Y mediante f l'insieme $f^{-1}(Y)$ così definito $f^{-1}(Y) \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \in A : f(x) \in Y\}$ evidentemente risulta $f(Y) \subseteq A$. Vale anche il seguente fatto: $Y \cap f(A) = \emptyset \Rightarrow f^{-1}(Y) = \emptyset$.

Presentiamo ora, alcuni esempi concreti di funzioni e loro grafici.

Prendiamo in esame il seguente problema.

Il signor Nino passa davanti al semaforo quando la lancetta del cronometro è sullo zero. Il semaforo è l'origine del riferimento per la misura della posizione. Supponiamo che Nino si muova alla velocità costante di 4 Km/h . In 1 ora percorre 4 Km , in 2 ore percorre 8 Km , in 3 ore percorre 12 Km . I chilometri percorsi da Nino (spazio percorso) dipendono dall'intervallo di tempo trascorso.

Quindi diciamo che lo spazio percorso è la **variabile dipendente** e il tempo trascorso è la **variabile indipendente**. Ossia lo spazio percorso dipende (è **funzione**) dal tempo (del tempo) trascorso.

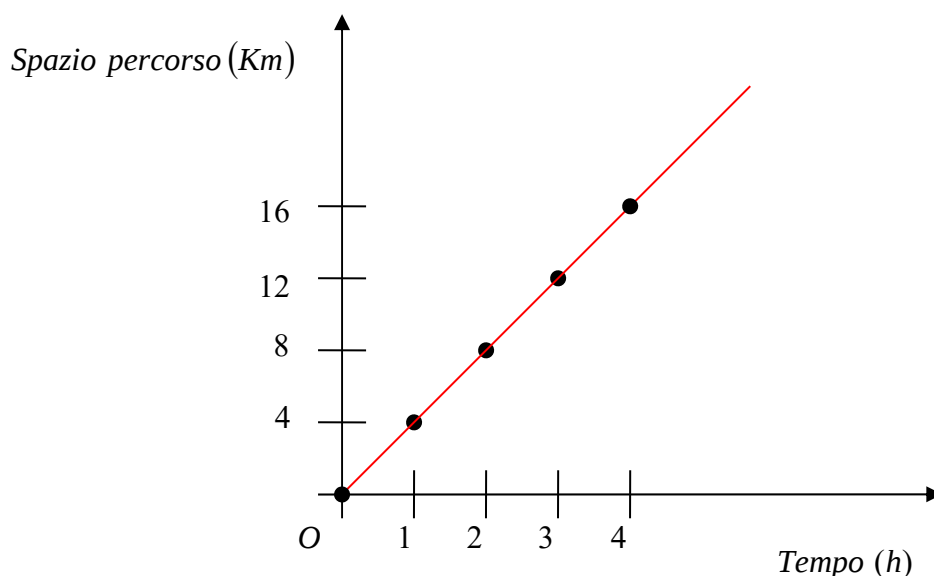
Possiamo rappresentare la questione con la seguente tabella:

Tempo (h)	0	1	2	3	4	...	10	...	t
Spazio (Km)	0	4	8	12	16	...	40	...	x

Oppure questo stesso fenomeno lo possiamo rappresentare con la formula:

$$x = 4 \cdot t \quad \text{dove } 4 \text{ è espresso in chilometri all'ora.}$$

Oppure questo stesso fenomeno lo possiamo rappresentare con seguente grafico:



La formula $x = 4 \cdot t$ esprime il fatto che la x è **funzione di** t .

In matematica, per esempio la formula $y = 3 \cdot x - 1$ (1) esprime il fatto che y è **funzione di** x senza precisare cosa si indica con x o con y . Anche la formula $y = x^2 - 1$ (2) esprime il fatto che y è **funzione di** x senza precisare cosa si indica con x o con y .

Dalla formula al grafico

Anche per le formule (1) e (2) o se vogliamo anche per le **funzioni** (1) e (2) si può dare una rappresentazione grafica.

Per rappresentare la funzione (1) costruiamo la seguente tabella

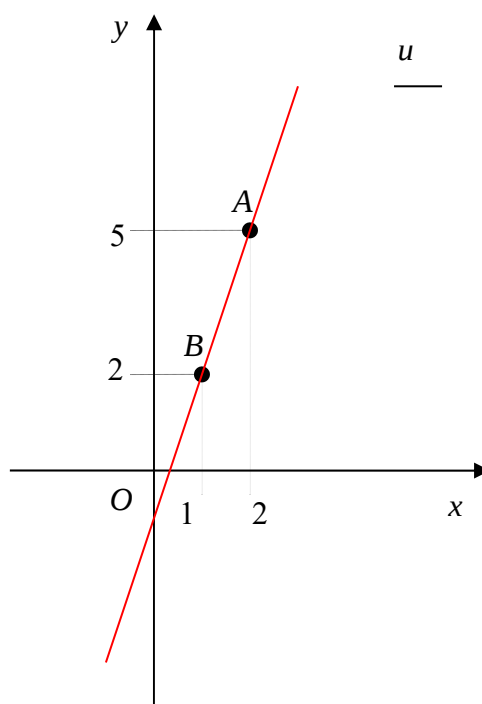
x	y
2	5
1	2

Cioè abbiamo dato un valore a caso, 2 alla x e abbiamo calcolato il corrispondente valore per la y , utilizzando appunto la (1) ossia:

$$y = 3 \cdot x - 1 = 3 \cdot 2 - 1 = 6 - 1 = 5,$$

ancora, abbiamo dato un altro valore a caso, 1 alla x e abbiamo calcolato il corrispondente valore per la y :

$$y = 3 \cdot x - 1 = 3 \cdot 1 - 1 = 3 - 1 = 2.$$



Per rappresentare la funzione (2) costruiamo, analogamente a quanto fatto prima, la seguente tabella:

x	y
0	-1
1	0
-1	0
2	3
-2	3
3	8
-3	8

Cioè abbiamo dato un valore a caso, 0 alla x e abbiamo calcolato il corrispondente valore per la y , utilizzando appunto la (3) ossia: $y = x^2 - 1 = 0^2 - 1 = -1$;

ancora, abbiamo dato un altro valore a caso, 1 alla x e abbiamo calcolato il corrispondente valore per la y : $y = x^2 - 1 = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$;

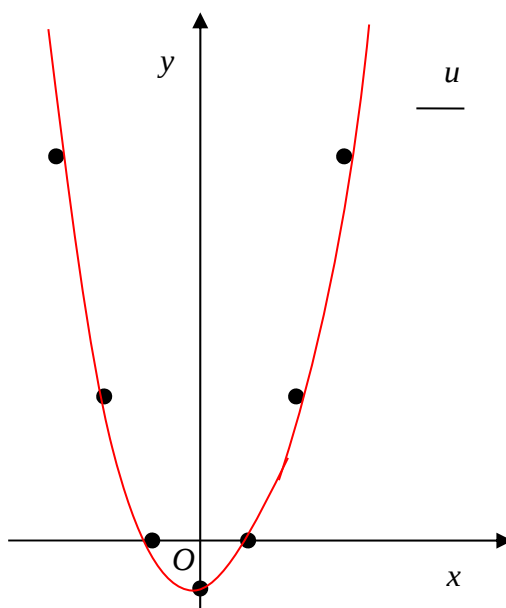
poi, abbiamo dato un altro valore a caso, -1 alla x e abbiamo calcolato il corrispondente valore per la y : $y = x^2 - 1 = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$;

poi, abbiamo dato un altro valore a caso, 2 alla x e abbiamo calcolato il corrispondente valore per la y : $y = x^2 - 1 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$;

poi, abbiamo dato un altro valore a caso, -2 alla x e abbiamo calcolato il corrispondente valore per la y : $y = x^2 - 1 = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$;

poi, abbiamo dato un altro valore a caso, 3 alla x e abbiamo calcolato il corrispondente valore per la y : $y = x^2 - 1 = 3^2 - 1 = 9 - 1 = 8$;

poi, abbiamo dato un altro valore a caso, -3 alla x e abbiamo calcolato il corrispondente valore per la y : $y = x^2 - 1 = (-3)^2 - 1 = 9 - 1 = 8$.



Provi il lettore a rappresentare le seguenti funzioni: $y = x^2 - 2$; $y = x^2 + 1$; $y = x^3$; $y = -x + 2$.

CAPITOLO 1.2

ELEMENTI DI GONIOMETRIA E TRIGONOMETRIA

➤ Elementi di geometria analitica

Data un'eq. di primo grado in due incognite, tanto per fissare le idee prendiamo la:

$$2x - y + 3 = 0 \quad (1)$$

ricordiamo, che **una soluzione** di una tale equazione è una **coppia ordinata di numeri reali** tale che, rimpiazzando la variabile x col primo numero della coppia e la variabile y col secondo numero della coppia, succede che il primo membro diventa uguale al secondo.

Così la coppia ordinata $(2, 3)$ non è una soluzione, infatti, rimpiazzando la variabile x col primo numero della coppia, cioè con 2, e la variabile y col secondo numero della coppia, cioè con 3 si ha:

$$2 \cdot 2 - 3 + 3 = 0 \Rightarrow 4 = 0.$$

La coppia ordinata $(4, 5)$ non è una soluzione, infatti si ha: $2 \cdot 4 - 5 + 3 = 0 \Rightarrow 8 - 5 + 3 = 0 \Rightarrow 6 = 0$.

La coppia ordinata $(2, 7)$ è una soluzione, infatti si ha: $2 \cdot 2 - 7 + 3 = 0 \Rightarrow 4 - 7 + 3 = 0 \Rightarrow 0 = 0$.

La coppia ordinata $(-2, -1)$ è una soluzione: $2 \cdot (-2) - (-1) + 3 = 0 \Rightarrow -4 + 1 + 3 = 0 \Rightarrow 0 = 0$.

La coppia ordinata $(0, 3)$ è una soluzione: $2 \cdot 0 - 3 + 3 = 0 \Rightarrow 0 = 0$.

La coppia ordinata $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ è una soluzione: $2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 0 + 3 = 0 \Rightarrow -3 + 3 = 0 \Rightarrow 0 = 0$.

Si intuisce che sono infinite le coppie ordinate di numeri reali che soddisfano la (1), anzi, per individuarle in modo più agile, scriviamo la (1) nella forma:

$$y = 2x + 3. \quad (2)$$

La (2), viene detta “forma esplicita” mentre la (1) “forma implicita”.

Nella forma (2), per trovare una soluzione della (1), basta dare un qualsiasi valore alla x (costituirà il primo numero della coppia) fare i “conti”, e si ottiene il secondo valore della coppia. Così, se alla x diamo per esempio 6 si ha: $2 \cdot 6 + 3 = 12 + 3 = 15$ dunque la coppia ordinata $(6, 15)$ è un'altra soluzione della (1) ancora, se alla x diamo per esempio -5 si ha: $2 \cdot (-5) + 3 = -10 + 3 = -7$ dunque la coppia ordinata $(-5, -7)$ è un'altra soluzione della (1).

Riassumendo, abbiamo trovato già sei soluzioni della (1) e precisamente:

$$(2, 7); (-2, -1); (0, 3); \left(-\frac{3}{2}, 0\right); (6, 15); (-5, -7).$$

Il lettore, dopo aver riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali monometrico (si consiglia di scegliere due quadretti come unità di misura) rappresenti i sei punti, (chiamiamoli pure A, B, C, D, E, F) aventi per coordinate, proprio le **coppie ordinate soluzioni dell'equazione (1)**:

$$A(2, 7); B(-2, -1); C(0, 3); D\left(-\frac{3}{2}, 0\right); E(6, 15); F(-5, -7).$$

Evidentemente i punti A, B, C, D, E, F risulteranno tutti allineati.

Ci chiediamo:

1. considerate altre soluzioni della (1), e rappresentando ancora i punti aventi per coordinate queste soluzioni, questi punti, saranno ancora allineati con A, B, C, D, E, F ?
2. se prendiamo un'altra equazione di primo grado in due incognite, succede la stessa cosa?

Le due domande hanno risposta affermativa entrambi.

Ci chiediamo ancora, visto che le soluzioni della (1) sono infinite, tutte queste infinite soluzioni, viste come coordinate di infiniti punti, danno sempre luogo a punti allineati con A, B, C, D, E, F ? Naturalmente per rispondere a quest'ultima domanda, mica possiamo provarli tutti.

Ancora, se prendiamo un'altra equazione di primo grado in due incognite, possiamo vedere se succede o meno la stessa cosa e vediamo che succede, ma le equazione di primo grado in due incognite sono infinite, possiamo provare infinite volte se

Provi il lettore a trovare sei soluzioni dell'equazione $-2x + y - 4 = 0$, quindi riferire il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali monometrico e rappresentare i sei punti aventi per coordinate queste sei soluzioni.

Vale il seguente teorema:

A ogni retta del piano cartesiano corrisponde^(*) un'equazione di primo grado in due incognite e, viceversa, a ogni equazione di primo grado in due incognite corrisponde^(*) una retta del piano cartesiano.

Ancora, anche ad una circonferenza per esempio, si può fare corrispondere^(**) un'equazione, e precisamente un'eq. del tipo:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad (3)$$

Ingenerale, un'equazione in due incognite $p(x, y) = 0$, si dice che è l'equazione di una curva Γ (gamma) e si scrive: $\Gamma : p(x, y) = 0$, da leggersi, curva Γ di equazione $p(x, y) = 0$, se ogni punto di Γ ha coordinate soddisfacenti l'eq. $p(x, y) = 0$ e viceversa, ogni coppia ordinata soluzione dell'eq. $p(x, y) = 0$, vista come coordinate di punti, dà luogo ad un punto che appartiene alla curva Γ .

^(*) Corrisponde, nel senso che, un punto appartiene alla retta, se e soltanto se, le sue coordinate sono soluzione dell'equazione e viceversa, ogni coppia ordinata soluzione dell'equazione, vista come coordinate di punti, dà luogo ad un punto che appartiene alla retta.

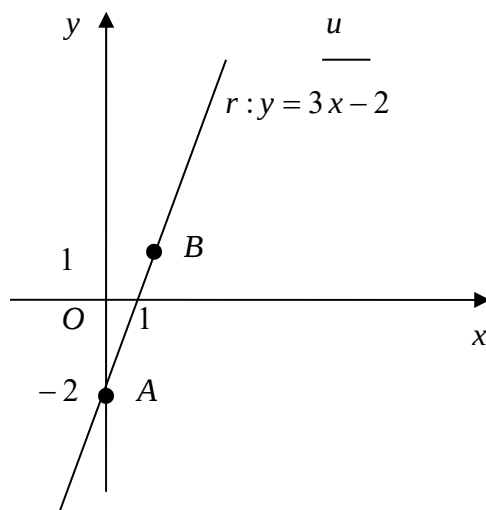
^(**) Corrispondere, nel senso che, un punto appartiene alla circonferenza, se e soltanto se, le sue coordinate sono soluzione dell'equazione (3) e viceversa, ogni coppia ordinata soluzione dell'equazione (3), vista come coordinate di punti, dà luogo ad un punto che appartiene alla circonferenza.

Esempi:

1. Rappresentare la $r : y = 3x - 2$ (retta r di equazione $y = 3x - 2$).

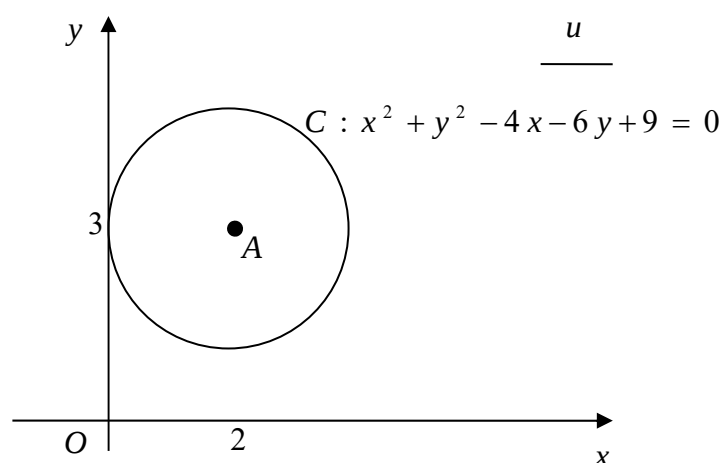
Svolgimento:

Basta trovare due soluzioni della $y = 3x - 2$, si vede facilmente che $(0, -2)$ e $(1, 1)$ sono soluzioni, quindi rappresentiamo i punti $A(0, -2)$, $B(1, 1)$ e tracciamo la retta che li contiene.



Un punto appartiene ad r , **se e soltanto se** le sue coordinate soddisfano l'eq. $y = 3x - 2$.

2. La circonferenza di centro il punto $A(2,3)$ e raggio $r = 2$, avrà equazione:
 $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$.

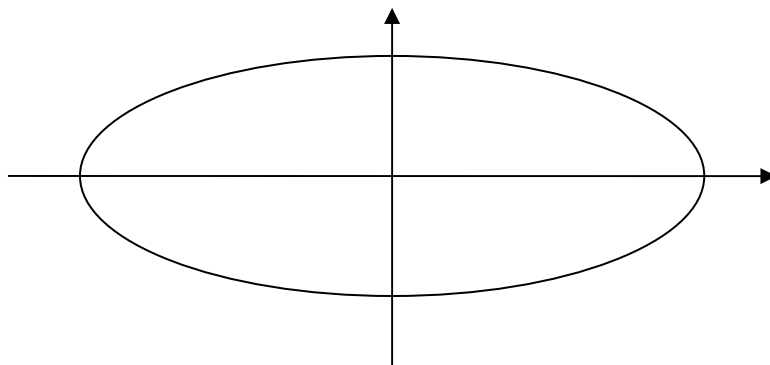


Un punto appartiene a C , **se e soltanto se** le sue coordinate soddisfano l'eq.

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0.$$

3. Anche la curva della figura seguente (Ellisse), avrà una sua equazione, che sarà del tipo:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



➤ ELEMENTI DI GONIOMETRIA E TRIGONOMETRIA

Scopo della trigonometria piana

Scopo della trigonometria piana è la risoluzione di un triangolo, cioè la determinazione dei suoi elementi ⁽¹⁾, quando, dei sei, se ne conoscano tre, tra cui sia compreso almeno un lato.

⁽¹⁾ Gli elementi di un triangolo sono i suoi tre lati ed i suoi tre angoli.

Alcune applicazioni pratiche della trigonometria

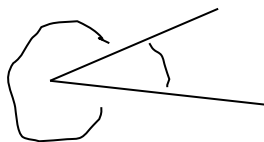
Esporremo in questo paragrafo alcune delle più notevoli applicazioni pratiche della trigonometria. Queste applicazioni servono a risolvere problemi di topografia, navigazione, astronomia, fisica, ecc., ecc.,...

- Determinazione dell'altezza di una torre (caso piede accessibile – caso piede non accessibile – caso piede inaccessibile ed invisibile)
- Determinazione della distanza fra due punti (caso un punto accessibile e un punto visibile ma non accessibile – caso punti inaccessibili)
- Lavoro di una forza
- Determinazione della intensità e della direzione della risultante di due forze applicate ad uno stesso punto
- Misura della depressione dell'orizzonte
- Distanza Terra-Luna, Terra-Sole

Misura degli angoli e degli archi circolari – Archi ed angoli orientati

È noto dalla geometria elementare il concetto di angolo ⁽²⁾ ed è pure noto che per misurare un angolo si usa il **sistema sessagesimale**.

⁽²⁾ Dato un piano, per angolo si intende, ciascuna di quelle due parti, in cui, il piano, rimane diviso da due sue semirette aventi la stessa origine. L'origine delle due semirette viene detto vertice dell'angolo e le due semirette lati dell'angolo.



Nel **sistema sessagesimale** si assume come unità di misura per gli angoli, l'**angolo grado**, che viene definito come la **novantesima parte dell'angolo retto**, e si indica col simbolo 1^0 .

I suoi sottomultipli sono: il **minuto primo** (o brevemente "**primo**") che è $\frac{1}{60}$ di grado e si indica col simbolo $1'$; il **minuto secondo** (o brevemente "**secondo**") che è $\frac{1}{60}$ di primo, e perciò $\frac{1}{3600}$ di grado, e si indica col simbolo $1''$. Ogni secondo si suddivide poi in decimi, centesimi, ecc.

Ad esempio, per indicare che un angolo di vertice O e di lati OA ed OB è somma di 25 gradi, 17 primi, 29 secondi e 7 centesimi di secondo, si scrive:

$$\hat{AOB} = 25^{\circ}17'29'',07$$

La misura dell'angolo $\hat{AOB}$ in gradi è:

$$\hat{AOB} = 25 + \frac{17}{60} + \frac{29}{3600} + \frac{7}{3600 \cdot 100} = \frac{\dots\dots\dots}{360000}.$$

In particolare: l'**angolo giro**, l'**angolo piatto**, l'**angolo retto** valgono rispettivamente 360° , 180° , 90° .

Esiste un altro sistema di misurazione degli angoli detto **sistema centesimale**, in questo sistema, si assume come unità di misura per gli angoli, l'**angolo grado centesimale**, che viene definito come la **centesima parte dell'angolo retto**, in questo sistema, in particolare si ha: l'**angolo giro**, l'**angolo piatto**, l'**angolo retto** valgono rispettivamente 400^g , 200^g , 100^g .

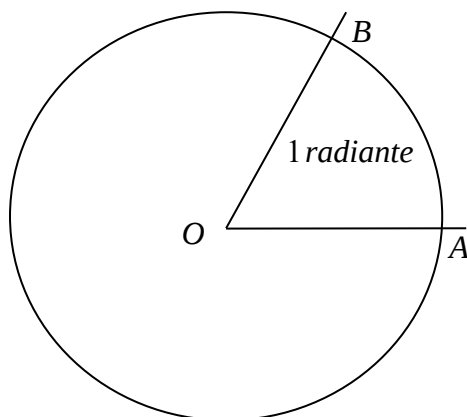
Il radiante

Per le esigenze della trigonometria e non solo, conviene misurare gli angoli in un altro modo. Questo “nuovo” sistema di misurazione, viene detto **sistema circolare**, in questo sistema, si assume, come unità di misura per gli angoli,

l'angolo radiante

(abbreviato **1 rad**).

L'**angolo radiante** è tale che, descrivendo una circonferenza che ha per vertice il centro dell'angolo, l'arco rettificato (stirato), intercetto fra i lati dell'angolo, è uguale al raggio.

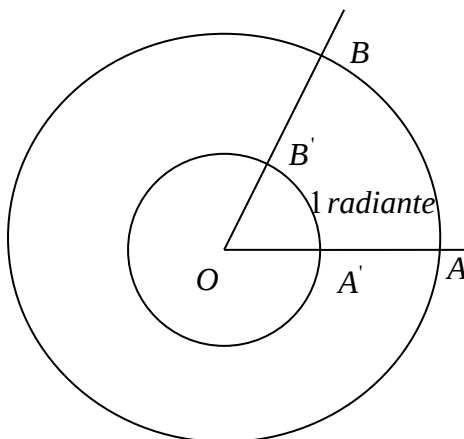


L'angolo di vertice O e lati OA ed OB di figura, è tale che:

la circonferenza di centro O e i lati dell'angolo OA ed OB , intercettano l'arco AB , che “stirato” diventa uguale al raggio della circonferenza stessa, questo angolo viene chiamato **angolo radiante** e viene assunto come unità di misura per gli angoli.

A questo punto, nel lettore, sarà certamente nata una certa perplessità!!!

Ma se disegniamo una circonferenza sempre di centro O e raggio diverso, non cambia tutto?!? Cioè non si ottiene un **angolo radiante diverso**?!!?



Come si può notare da quest'ultima figura, l'arco $A'B'$, stirato, diventa uguale al raggio della circonferenza interna, dunque l'angolo da noi chiamato radiante è individuato univocamente.

Quanto misura un angolo piatto? Il lettore intelligente dirà: dipende!!!

Se usiamo il grado sessagesimale misurerà 180^0 , se usiamo il grado centesimale misurerà 200^g , se usiamo come unità di misura l'angolo radiante, dobbiamo vedere quante volte esso è contenuto in un angolo piatto.

I lati di un angolo piatto, intercettano una semicirconferenza, la semicirconferenza rettificata vale πr (infatti l'intera circonferenza rettificata vale $2\pi r$), l'angolo radiante individuava un arco, il quale stirato valeva r , dunque l'angolo radiante nell'angolo piatto è contenuto esattamente π volte, pertanto **un angolo piatto misura π rad**.

Va da sé allora, che:

Un angolo retto misura $\frac{\pi}{2} rad$, un angolo giro misura $2\pi rad$ e con un po' di ragionamento, si

vede che un angolo di 270^0 , in radianti misurerà $\frac{3}{2}\pi$.

È necessario sapere **come si passa dalla misura di un angolo in radianti alla misura dello stesso angolo in gradi e viceversa**.

Esprimendo con α la misura in gradi e con β la misura in radiante del medesimo angolo, si ha:

$$\alpha : 360 = \beta : 2\pi$$

Cioè la misura in gradi, sta alla misura in gradi dell'angolo giro come la misura in radiante, sta alla misura in radianti dell'angolo giro. Da questa proporzione si hanno le seguenti:

$$\alpha = \frac{360}{2\pi} \beta, \quad \beta = \frac{2\pi}{360} \alpha.$$

Ossia semplificando:

$$\alpha = \frac{180}{\pi} \beta, \quad \beta = \frac{\pi}{180} \alpha.$$

Così se un angolo misura 30^0 cioè se $\alpha = 30^0$, in radianti misura: $\beta = \frac{\pi}{180} 30 = \frac{\pi}{6}$. Così pure un

angolo di $\frac{\pi}{4} rad$ misurerà: $\alpha = \frac{180}{\pi} \frac{\pi}{4} = 45^0$.

In particolare abbiamo:

Gradi	Radiani	Gradi	Radiani	Gradi	Radiani	Gradi	Radiani	Gradi	Radiani
0	0	36	$\frac{\pi}{5}$	90	$\frac{\pi}{2}$	210	$\frac{7\pi}{6}$	315	$\frac{7\pi}{4}$
15	$\frac{\pi}{12}$	45	$\frac{\pi}{4}$	120	$\frac{2\pi}{3}$	225	$\frac{5\pi}{4}$	330	$\frac{11\pi}{6}$
18	$\frac{\pi}{10}$	60	$\frac{\pi}{3}$	135	$\frac{3\pi}{4}$	240	$\frac{4\pi}{3}$	360	2π
22°30'	$\frac{\pi}{8}$	72	$\frac{2\pi}{5}$	150	$\frac{5\pi}{6}$	270	$\frac{3\pi}{2}$		
30	$\frac{\pi}{6}$	75	$\frac{5\pi}{12}$	180	π	300	$\frac{5\pi}{3}$		

Estensione del concetto di angolo e di arco circolare

Una semiretta di origine O può ruotare intorno ad O in due sensi o versi opposti: nel senso orario e nel senso antiorario; **si conviene di considerare positivo il senso antiorario.**

Quando la semiretta parte da una posizione a e, ruotando intorno all'origine O , giunge nella posizione b , si dice che ha descritto l'**angolo ab** : e i lati a , b si dicono rispettivamente **origine** ed **estremo** dell'angolo.

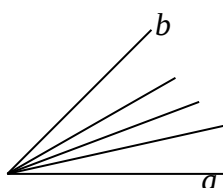


Figura 1

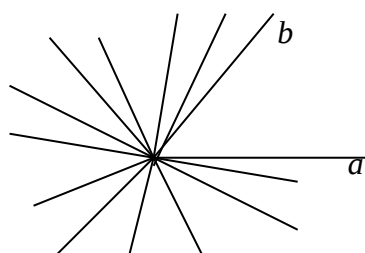


Figura 2

Un angolo ab risulta perciò costituito da infinite semirette aventi l'origine nel suo vertice e si considera **positivo** (fig. 1) quando la semiretta che lo genera ruota nel verso antiorario, **negativo** (fig. 2) in caso contrario.

D'ora in avanti quindi "angolo" va inteso come "rotazione" e viene perciò ad avere un significato più ampio di quello che ha in geometria elementare, pur comprendendo il primitivo concetto di angolo. Con questa estensione si può parlare di angolo positivo e di angolo negativo, anche di angolo maggiore di uno o più angoli giri.

Pertanto **date due semirette a e b , uscenti da uno stesso punto O , vi sono infiniti angoli di origine a ed estremo b** : tra questi, ve n'è uno positivo minore di un angolo giro (fig. 1), tutti gli altri differiscono da esso per multipli (positivi o negativi) dell'angolo giro.

Se α indica la misura in gradi dell'angolo positivo ab minore di un angolo giro e β la misura in radiante del medesimo angolo, tutti gli angoli ab sono dati da:

$$\alpha^0 + k360^0,$$

oppure

$$(\beta + 2k\pi)\text{rad},$$

dove k indica un qualsiasi numero intero negativo, nullo o positivo.

Alcuni autori questa “nuova” definizione di angolo la chiamano “definizione dinamica” mentre la “vecchia” la chiamano “definizione statica”.

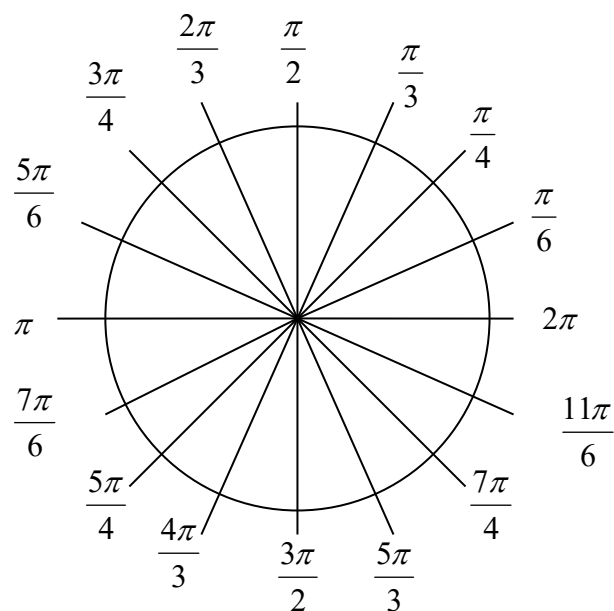
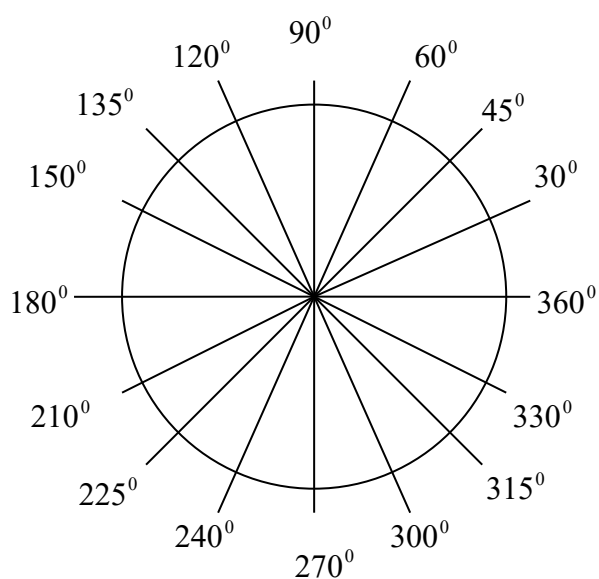
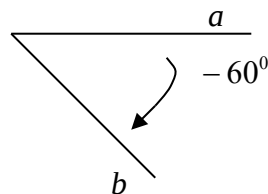
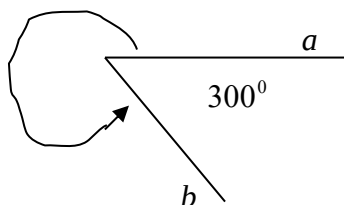
Ancora, si osservi che scritte come

$$300^{\circ} + k 360^{\circ}, \quad -60^{\circ} + h 360^{\circ}$$

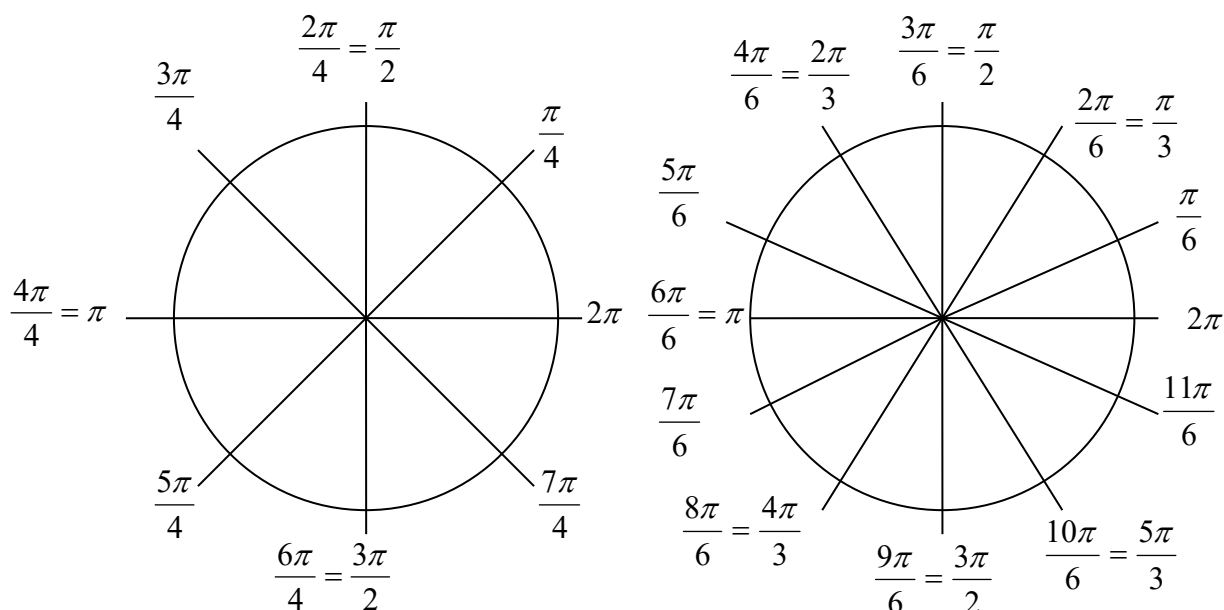
sono equivalenti (ad esempio, danno entrambi -60° per $k = -1$ e $h = 0$ rispettivamente e 300° per

$k = 0$ e $h = 1$). Così pure sono equivalenti $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ e $-\frac{7\pi}{6} + 2h\pi$.

Si guardino anche i disegni seguenti.



Diamo adesso una “tecnica” per costruire



Cioè $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{8}{4}$; e ancora $\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \dots, \frac{12}{6}$.

❖ Funzioni circolari

Circonferenza trigonometrica

Una circonferenza si dice **trigonometrica** quando il suo **centro** è l'**origine** di un sistema di assi cartesiani ortogonali ed il suo **raggio** è assunto come **unità di misura** dei segmenti (perciò si dice che il suo raggio è unitario); il senso positivo di percorso sulla circonferenza è quello **antiorario**.

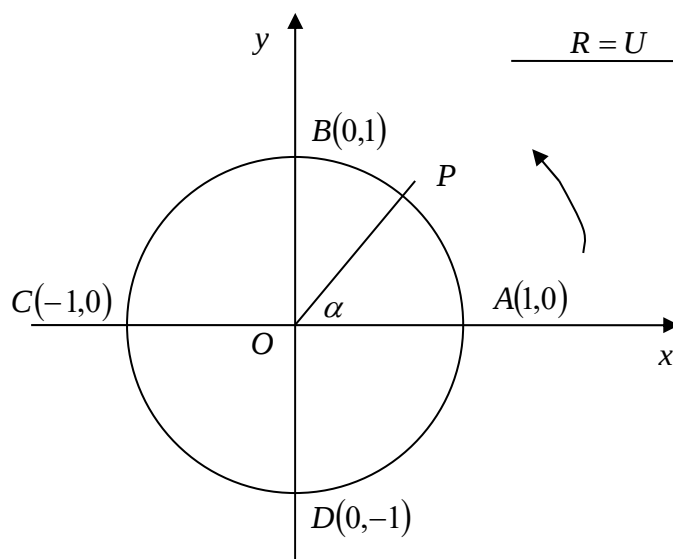


Figura 3

Il punto A , intersezione tra la circonferenza e il semiasse positivo delle ascisse, viene assunto come **origine degli archi** di tale circonferenza e perciò viene detto **punto origine degli archi**, il lato OA si assume come **lato origine degli angoli di vertice** O .

Osservazione 1: se P è un punto qualunque della circonferenza, tanto l'arco AP quanto l'angolo al centro corrispondente $\widehat{AOP}$ vengono ad avere la stessa ampiezza, perciò parleremo indifferentemente di arco o di angolo.

Osservazione 2: considerando l'arco positivo AP , descritto dal solito punto "mobile" P , si vede che, quando P parte da A e ritorna in A , dopo aver fatto un giro completo, gli archi:

AA (nullo), AB , AC , AD , AA (uguale a tutta la circonferenza) sono rispettivamente:

$$0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$$

Ovvero:

$$0 \text{ rad}, \frac{\pi}{2} \text{ rad}, \pi \text{ rad}, \frac{3\pi}{2} \text{ rad}, 2\pi \text{ rad}.$$

Seno, coseno, tangente di un arco (o di un angolo)

Nella circonferenza trigonometrica (fig. 4) sia AP un arco con origine in A ed estremo in un punto qualunque della circonferenza, di cui α e β sono rispettivamente, le misure in gradi e radianti, ed M è la proiezione del punto P sull'asse x : l'ordinata e l'ascissa del punto P sono **funzioni** di α (o β). Infatti, ad ogni valore di α (o β) corrisponde una posizione dell'estremo P dell'arco e quindi un determinato valore per l'ordinata e l'ascissa del punto P .

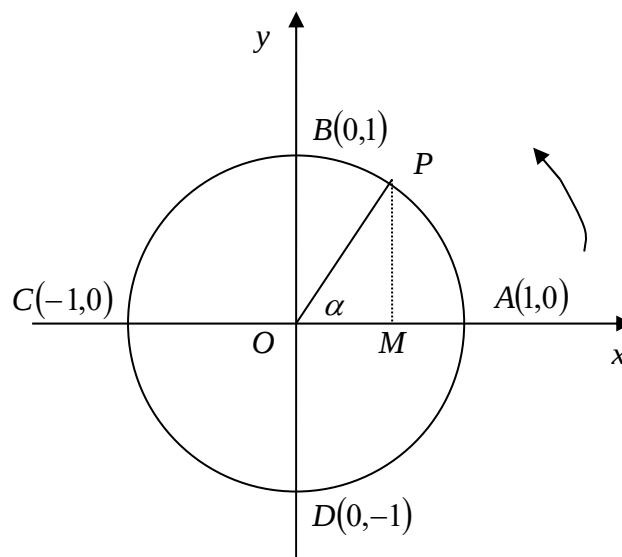


Figura 4

Dicesi **seno** di un arco sulla circonferenza trigonometrica l'**ordinata** dell'estremo dell'arco.

Se l'arco in considerazione è l'arco AP , si scrive: $\sin \alpha^0 = \sin \beta \stackrel{\text{def}}{=} \overline{MP}$.

Dicesi **coseno** di un arco sulla circonferenza trigonometrica l'**ascissa** dell'estremo dell'arco.

Se l'arco in considerazione è l'arco AP , si scrive: $\cos \alpha^0 = \cos \beta \stackrel{\text{def}}{=} \overline{OM}$.

Tracciata la tangente geometrica t alla circonferenza trigonometrica nel punto A (fig. 5) e detto T il suo punto d'incontro con il prolungamento del segmento che unisce il centro della circonferenza con l'estremo P dell'arco AP , l'ordinata del punto T è funzione dell'arco.

Dicesi **tangente** di un arco sulla circonferenza trigonometrica l'**ordinata** del punto di incontro, tra la tangente geometrica alla circonferenza trigonometrica nel punto origine degli archi ed il prolungamento del segmento che unisce il centro della circonferenza con l'estremo dell'arco.

Se l'arco in considerazione è l'arco AP , si scrive: $tg \alpha^0 = tg \beta \stackrel{def}{=} \overline{AT}$.

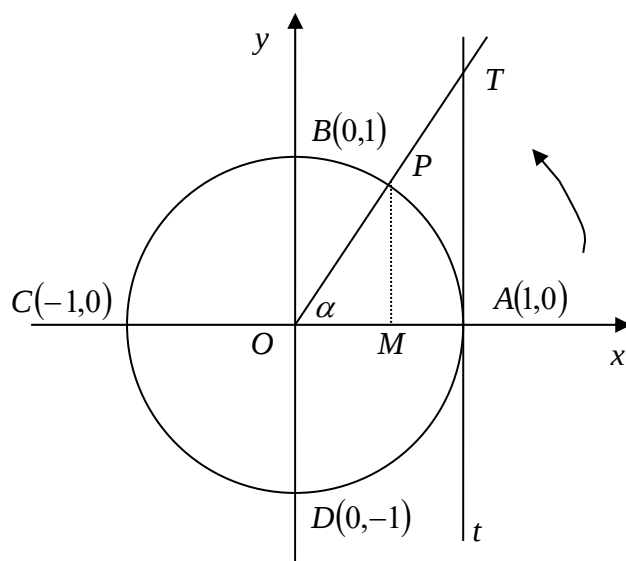


Figura 5

Quando si considerano le scritture $\sin \alpha^0$, $\cos \alpha^0$, $tg \alpha^0$ è uso chiamare α **argomento** del seno, coseno, tangente.

In seguito per brevità di scrittura scriveremo α invece di α^0 , dove ciò non dia luogo ad equivoci. Così, ad esempio, il simbolo $\sin(90^0 + \alpha)$ sostituirà quello più proprio $\sin(90^0 + \alpha^0)$; spesso si scrive anche $\sin(90 + \alpha)$.

È opportuno mettere in rilievo che:

$$\sin \alpha, \cos \alpha, tg \alpha$$

sono numeri reali.

Ciò discende subito dalle loro definizioni. Ad esempio, il seno di un arco, essendo l'ordinata dell'estremo di questo, è, evidentemente, un numero relativo. Tale numero (fig. 4), è la misura, rispetto al raggio (che è ad esempio OP ovvero OA) della circonferenza trigonometrica, del segmento orientato MP e quindi si ha, anche:

$$\sin \alpha \stackrel{def}{=} \frac{MP}{OP}, \quad \cos \alpha \stackrel{def}{=} \frac{OM}{OP}, \quad tg \alpha \stackrel{def}{=} \frac{AT}{OP}.$$

Dalle definizioni segue immediatamente che: $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, $tg 0 = 0$ e ancora $\sin 90 = 1$, $\cos 90 = 0$, $tg 90 \text{ non } \exists$ o se vogliamo $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $tg \frac{\pi}{2} \text{ non } \exists$, cioè si ha la seguente:

α	β	Seno	Coseno	Tangente
0	0	0	1	0
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\text{non } \exists$
180	π	0	-1	0
270	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$\text{non } \exists$
360	0	0	1	0

Ancora: esiste qualche arco che ha il seno uguale a due?

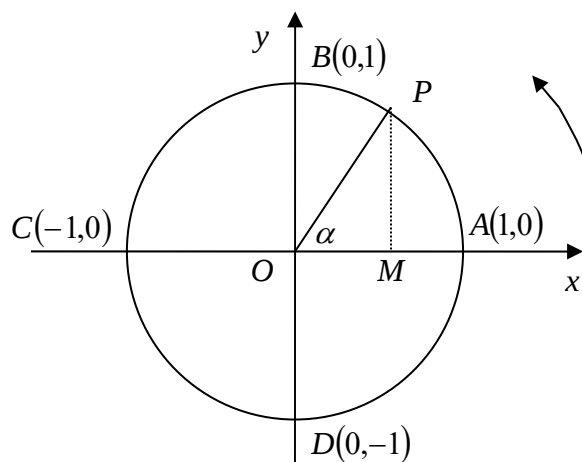


Figura 4'

evidentemente, per come stanno le cose, il seno al massimo può valere uno, infatti $\overline{MP} = \frac{MP}{OP}$ al massimo può valere uno e ciò accade quando $P \equiv B$, mentre quando $P \equiv D$ questa rapporto vale -1 ; dunque si ha: $-1 \leq \sin \alpha \leq 1, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Mutatis mutandis per il coseno: $-1 \leq \cos \alpha \leq 1, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Per quanto riguarda la tangente abbiamo:

$$-\infty < \tan \alpha < +\infty, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ma si parla di $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ solo se $\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$? Assolutamente no!!!

Si può dimostrare per esempio che:

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tan \frac{\pi}{4} = 1; \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}; \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad \text{O se vogliamo (in gradi):}$$

$$\sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tan 45 = 1; \quad \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60 = \frac{1}{2}, \quad \tan 60 = \sqrt{3}; \quad \sin 30 = \frac{1}{2}, \quad .$$

$$\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan 30 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

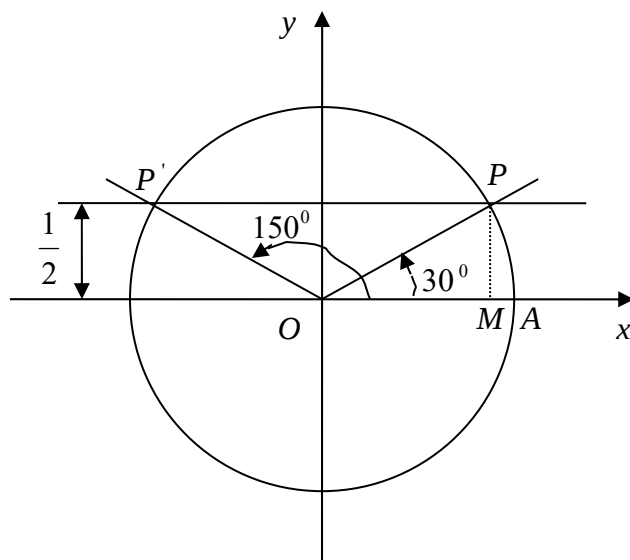
Comunque si ha: $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tan: \mathbb{R} - \left\{ x \in \mathbb{R}, x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \right\} \rightarrow \mathbb{R};$

cioè il seno ed il coseno sono funzioni definite in tutto $\mathbb{R}$, mentre la tangente è definita in

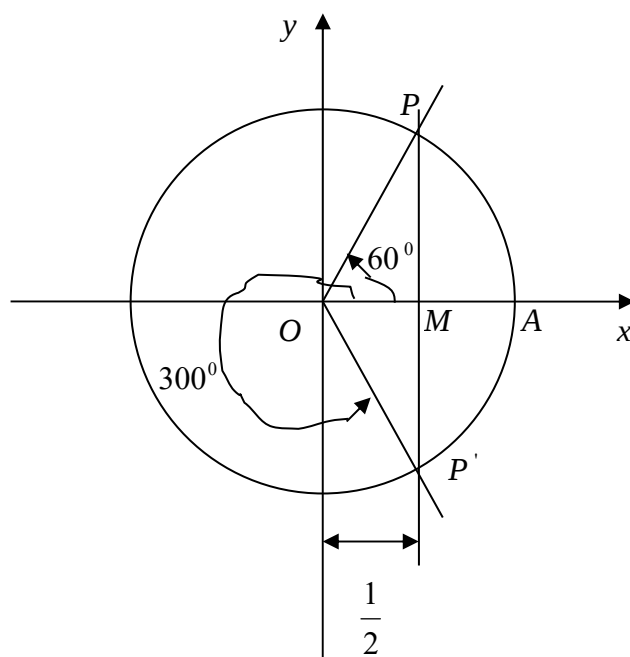
$$\mathbb{R} - \left\{ x \in \mathbb{R}, x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \right\}$$

ossia in $\mathbb{R}$ privato degli $x \in \mathbb{R}$ tali che $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Ora disegniamo gli archi che hanno per seno $\frac{1}{2}$ per esempio:



Ecco gli archi che hanno per coseno $\frac{1}{2}$:



Relazioni fondamentali tra seno, coseno, tangente di uno stesso arco.

Esiste una relazione fondamentale tra seno e coseno di uno stesso arco e precisamente:
la somma dei quadrati del seno e del coseno di uno stesso arco vale 1, in simboli:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

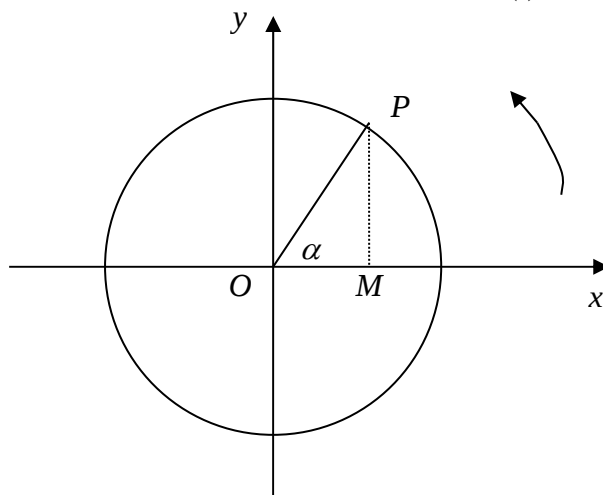


Figura 1

Dimostrazione: osservando la figura 1, dal triangolo rettangolo OMP , si ha, per il teorema di Pitagora: $\overline{MP}^2 + \overline{OM}^2 = \overline{OP}^2$, poiché $\overline{MP} = \sin \alpha$, $\overline{OM} = \cos \alpha$, $\overline{OP} = 1$, si trae: $(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$, ossia la (1), c.v.d., dove si è scritto $\sin^2 \alpha$ (scrittura più agile) in luogo di $(\sin \alpha)^2$, cosa che sarà fatta dora innanzi sempre e per tutte le funzioni goniometriche, non si confonda tuttavia la scrittura $\sin^2 \alpha$ con la $\sin \alpha^2$.

Esiste una seconda relazione fondamentale tra seno, coseno e tangente di uno stesso arco e precisamente:

la tangente di un arco vale il rapporto tra il seno ed il coseno dell'arco, (sempre che il coseno dell'arco sia diverso da zero), in simboli:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (2)$$

Dim.: osservando la figura 2, dalla similitudine dei triangoli OMP , OAT si trae: $\frac{MP}{OM} = \frac{AT}{OA}$ ossia,

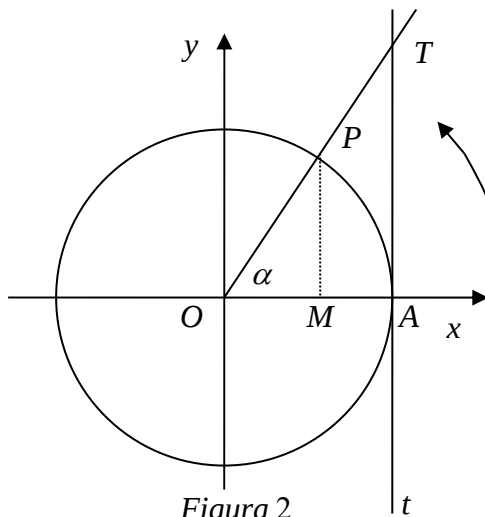


Figura 2

$$\frac{\overline{MP}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} \text{ e perciò } \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\tan \alpha}{1} \text{ quindi la (2), c.v.d..}$$

Le relazioni (1) e (2) vengono anche dette **identità trigonometriche fondamentali** e nessuna di essa può essere dedotta dall'altra.

Cosecante, secante, cotangente di un arco

Oltre alle funzioni seno, coseno, tangente già definite, si usano talvolta anche altre tre funzioni goniometriche, **la cosecante, la secante e la cotangente di un arco**.

Queste funzioni sono definite sulla circonferenza trigonometrica come segue:

- **Cosecante**

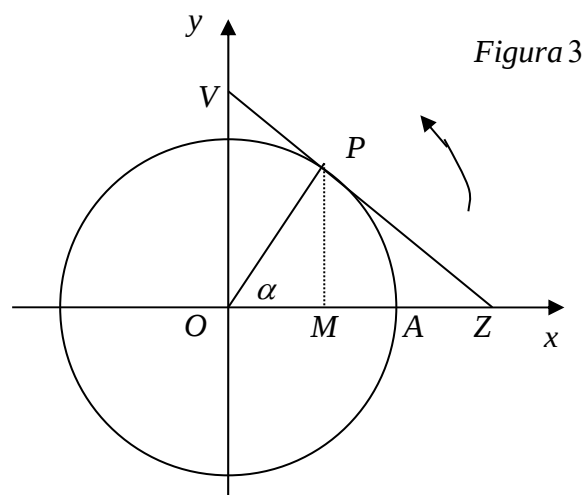


Figura 3

$$\operatorname{cosec} \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \overline{OV}.$$

Dunque, **sulla circonferenza trigonometrica, la cosecante di un arco è l'ordinata del punto in cui la tangente geometrica alla circonferenza nell'estremo dell'arco incontra l'asse delle ordinate.**

- **Secante**

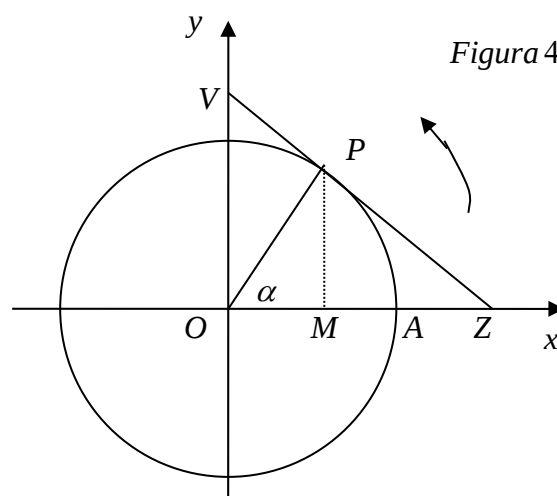


Figura 4

$$\sec \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \overline{OZ}.$$

Dunque, sulla circonferenza trigonometrica, la secante di un arco è l'ascissa del punto in cui la tangente geometrica alla circonferenza nell'estremo dell'arco incontra l'asse delle ascisse.

- **Cotangente**

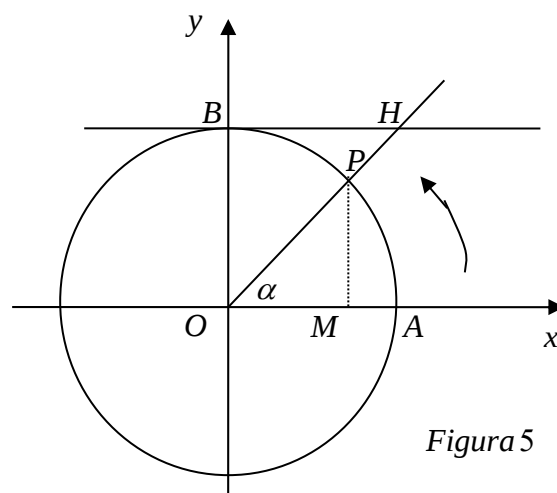


Figura 5

$$ctg \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \overline{BH}.$$

Dunque, sulla circonferenza trigonometrica, la cotangente di un arco è l'ascissa del punto (punto H) in cui la tangente geometrica alla circonferenza nell'estremo dell'arco di $\frac{\pi}{2} rad$ (punto B) incontra il prolungamento del segmento che unisce il centro della circonfer. trig. con l'estremo dell'arco.

Valgono le seguenti altre relazioni fondamentali:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}, \quad \forall \alpha \in \mathfrak{R}, \quad \alpha \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}); \quad (3)$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \forall \alpha \in \mathfrak{R}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}); \quad (4)$$

$$ctg \alpha = \frac{1}{tg \alpha}, \quad \forall \alpha \in \mathfrak{R}, \quad \alpha \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (5)$$

Si dimostri che la relazione (5) è equivalente alla:

$$ctg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}, \quad \forall \alpha \in \mathfrak{R}, \quad \alpha \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (5')$$

Relazioni fra gli elementi di un triangolo rettangolo

È noto che elementi di un triangolo sono i suoi tre lati e i suoi tre angoli.

In un triangolo rettangolo ABC indicheremo con A il vertice dell'angolo retto, con a la lunghezza dell'ipotenusa, con b, c le lunghezze dei cateti opposti ai vertici B, C rispettivamente e con α, β, γ le misure (in gradi o in radianti) degli angoli di vertici A, B, C rispettivamente; perciò si

ha la figura 1, dove $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, $a > b$, $a > c$.

Per un triangolo rettangolo valgono i seguenti teoremi:

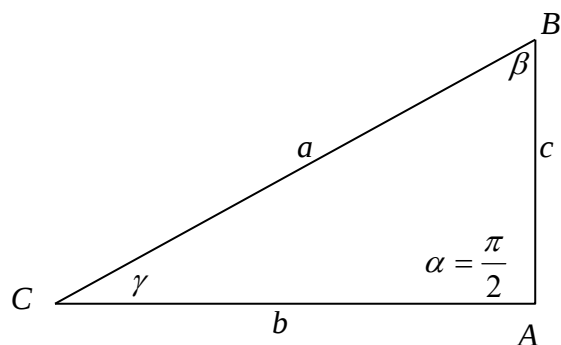


Figura 1

- a. Un cateto è uguale al prodotto dell'ipotenusa per il seno dell'angolo ad esso opposto.

$$c = a \sin \gamma, \quad b = a \sin \beta. \quad (1)$$

- b. Un cateto è uguale al prodotto dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo acuto ad esso adiacente.

$$c = a \cos \beta, \quad b = a \cos \gamma. \quad (2)$$

- c. Un cateto è uguale al prodotto dell'altro cateto per la tangente dell'angolo ad esso opposto.

$$c = b \tan \gamma, \quad b = c \tan \beta. \quad (3)$$

- d. Un cateto è uguale al prodotto dell'altro cateto per la cotangente dell'angolo acuto ad esso adiacente.

$$c = b \cot \beta, \quad b = c \cot \gamma. \quad (4)$$

Teoremi fondamentali relativi ad un triangolo qualunque

Teorema della corda

In ogni circonferenza, la misura di ciascuna corda è uguale al prodotto della misura del diametro per il seno di uno qualunque degli angoli alla circonferenza che insistono sulla corda.

Dim.:

Nella figura 1, della pag. seguente è disegnata la corda AB e alcuni angoli alla circonferenza ($\hat{P}, \hat{Q}, \hat{S}$) che insistono su di essa, è noto dalla geometria elementare che tutti gli angoli alla circonferenza che insistono sulla medesima corda sono congruenti fra loro o supplementari.

In particolare (figura 2), anche l'angolo $\hat{C}$ che si ottiene tracciando il diametro BC della circonferenza ha la stessa ampiezza, chiamiamola α degli angoli $\hat{P}, \hat{Q}, \hat{S}, \dots$

È noto, sempre dalla geometria elementare, che il triangolo ABC è rettangolo in A , perché inscritto in una semicirconferenza; possiamo allora calcolare la misura di AB con la relazione valida per i triangoli rettangoli: $\overline{AB} = 2R \sin \alpha$ essendo R la misura del raggio della circonferenza e α l'ampiezza di uno qualunque degli angoli alla circonferenza che insistono sulla corda AB . Pertanto rimane dimostrato il teorema.

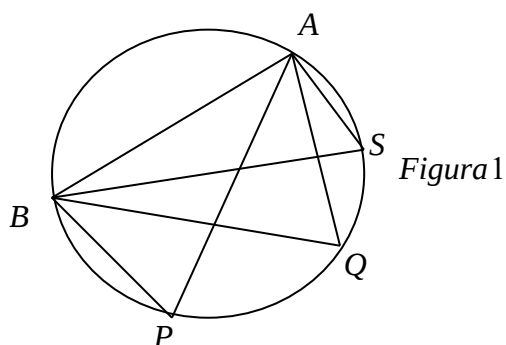


Figura 1

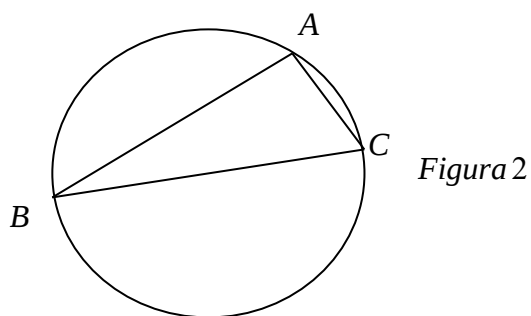
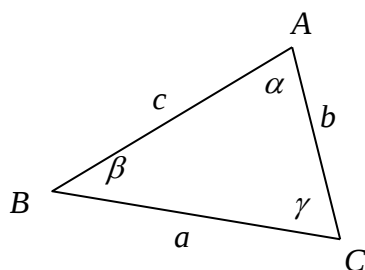


Figura 2

Teorema dei seni (o di Eulero)

In un triangolo le misure dei lati, sono proporzionali ai seni degli angoli rispettivamente opposti, cioè:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$



Dim.: ovvia a partire dal teorema della corda e constatando che $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$, essendo R la misura del raggio della circonferenza circoscritta al triangolo.

Teorema delle proiezioni (o di Cotes)

In un triangolo ogni lato è uguale alla somma dei prodotti di ognuno degli altri due lati moltiplicato per il coseno dell'angolo compreso tra questo ed il lato considerato, cioè:

$$a = c \cos \beta + b \cos \gamma; \quad b = a \cos \gamma + c \cos \alpha; \quad c = a \cos \beta + b \cos \alpha.$$

Dim.:

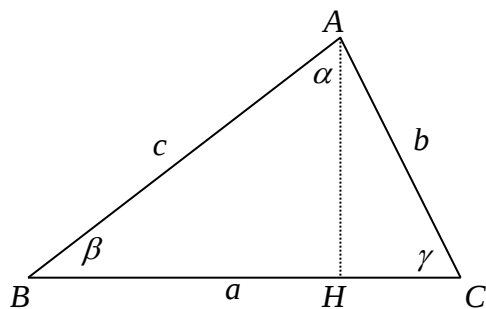


Figura 4

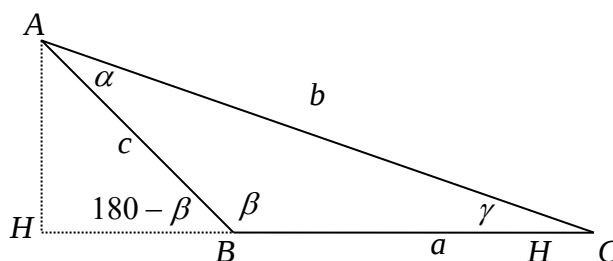


Figura 5

Dimostriamo, tanto per fissare le idee la $a = c \cos \beta + b \cos \gamma$, supponiamo il triangolo ABC acutangolo, (Figura 4). Condotta da A la perpendicolare AH al lato BC , questo viene diviso dal piede H di tale perpendicolare in due segmenti BH , CH , che sono cateti dei triangoli rettangoli ABH ed ACH . Per le note relazioni tra gli elementi di un triangolo rettangolo, si ha:

$$a = \overline{BH} + \overline{CH} = c \cos \beta + b \cos \gamma.$$

Se poi il triangolo ABC è ottusangolo ad esempio in B (Figura 5), la perpendicolare AH abbassata da A sul lato BC , ha il suo piede H che cade sul prolungamento di BC , onde si avrà che:

$$a = \overline{HC} - \overline{HB} = b \cos \gamma - c \cos(180 - \beta) = b \cos \gamma + c \cos \beta.$$

Analogamente si dimostrano le altre.

Teorema del coseno (o di Carnot o di Pitagora generalizzato)

In un triangolo il quadrato di un lato vale la somma dei quadrati degli altri due lati, diminuita del doppio prodotto di questi due lati per il coseno dell'angolo compreso tra essi, cioè:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha; \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta; \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Dim.: dimostriamo la: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$.

Moltiplichiamo ambo i membri della prima espressione del teorema delle proiezioni per a , ambo i membri della seconda espressione del teorema delle proiezioni per $-b$ e ambo i membri della terza espressione del teorema delle proiezioni per $-c$ quindi otteniamo:

$$\begin{aligned} a^2 &= ac \cos \beta + ab \cos \gamma; \\ -b^2 &= -ab \cos \gamma - bc \cos \alpha; \\ -c^2 &= -ac \cos \beta - bc \cos \alpha. \end{aligned}$$

Sommando membro a membro queste relazioni, ridotti i termini simili, si ha:

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \cos \alpha;$$

ossia:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Mutatis mutandis si dimostrano le altre.

Si noti che qualora sia $\alpha = 90$, ossia il triangolo ABC sia rettangolo, la: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$; diventa: $a^2 = b^2 + c^2$; cioè il teorema di Carnot “restituisce” il Teorema di Pitagora, taluni autori proprio per questa ragione, chiamano il teorema di Carnot anche teorema di Pitagora generalizzato.

Dalle tre espressioni del teorema di Carnot, si hanno rispettivamente le seguenti:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}; \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab};$$

che permettono di calcolare gli angoli di un triangolo, noti i lati.

CAPITOLO 1.3

ELEMENTI DI CALCOLO INFINITESIMALE ED INTEGRALE

❖ I numeri reali per via assiomatica

Siano $\mathfrak{R}$ un insieme, $+: \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$; $\cdot: \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ due applicazioni definite in $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}$ ossia due leggi di composizione interne dette rispettivamente addizione e moltiplicazione, per le quali usiamo la seguente notazione: $x + y$ è il corrispondente di (x, y) mediante l'operazione $+$, lo chiamiamo somma di x e y mentre xy è il corrispondente di (x, y) mediante l'operazione $\cdot$, lo chiamiamo prodotto di x e y e sia inoltre $\leq$ una relazione d'ordine totale in $\mathfrak{R}$. L'insieme $\mathfrak{R}$ così strutturato è **l'insieme dei numeri reali** se valgono i seguenti 12 assiomi:

1. $\forall x, y, z \in \mathfrak{R} \Rightarrow (x + y) + z = x + (y + z)$ Proprietà associativa
2. $\exists e \in \mathfrak{R} : \forall x \in \mathfrak{R} \Rightarrow x + e = e + x = x$ l'elemento e viene detto elemento neutro dell'addizione (*)
3. $\forall x \in \mathfrak{R} \exists x' \in \mathfrak{R} : x + x' = x' + x = 0$ l'elemento x' viene detto opposto di x (**)
4. $\forall x, y \in \mathfrak{R} \Rightarrow x + y = y + x$ Proprietà commutativa
5. $\forall x, y, z \in \mathfrak{R} \Rightarrow (xy)z = x(yz)$ Proprietà associativa
6. $\exists u \in \mathfrak{R}, u \neq 0 : \forall x \in \mathfrak{R} \Rightarrow xu = ux = x$ l'elem. u viene detto elemento neutro della multipl. (*)
7. $\forall x \in \mathfrak{R}, x \neq 0 \exists x' \in \mathfrak{R} : xx' = x'x = 1$ l'elemento x' viene detto reciproco di x (**)
8. $\forall x, y \in \mathfrak{R} \Rightarrow xy = yx$ Proprietà commutativa
9. $\forall x, y, z \in \mathfrak{R} \Rightarrow x(y + z) = xy + xz$ Proprietà distributiva della multipl. rispetto all'add.
10. $\forall x, y, z \in \mathfrak{R}, x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$
11. $\forall x, y \in \mathfrak{R}, 0 \leq x, 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy$
12. $A \subseteq \mathfrak{R}, B \subseteq \mathfrak{R}; A \neq \emptyset, B \neq \emptyset; \forall a \in A, \forall b \in B \ a \leq b$ allora $\exists L \in \mathfrak{R} : a \leq L \leq b \forall a \in A \ e \ \forall b \in B$
L'assioma 12 è conosciuto in letteratura come **assioma della completezza**, inoltre possiamo dire che $(\mathfrak{R}, +)$ è un **gruppo abeliano**; ponendo $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R} - \{0\}$ risulta $(\mathfrak{R}^*, \cdot)$ **gruppo abeliano**, quindi $(\mathfrak{R}, +, \cdot)$ è un corpo commutativo cioè un campo. Riassumendo:

$(\mathfrak{R}, +, \cdot, \leq)$ è un campo totalmente ordinato e completo.

- (*) l'elemento e di cui all'assioma 2. è unico, si indica con 0 e si chiama zero. Quindi $\mathfrak{R}$ possiede almeno un elemento;
l'elemento u di cui all'assioma 6. è unico, si indica con 1 e si chiama uno. Quindi $\mathfrak{R}$ possiede almeno due elementi.
- (**) l'elemento x' di cui all'assioma 3. è unico, si indica con $-x$ e si chiama opposto di x ;
l'elemento x' di cui all'assioma 7. è unico, si indica con x^{-1} oppure con $\frac{1}{x}$ e si chiama reciproco di x .

Retta reale estesa

Si chiama **retta reale estesa**, e si indica con $\overline{\mathbb{R}}$, l'insieme ottenuto aggiungendo a $\mathbb{R}$ due nuovi elementi, che indichiamo con $-\infty$ e $+\infty$ (- infinito e + infinito) con le proprietà:

- $\forall x, x \in \mathbb{R} \Rightarrow -\infty < x < +\infty; \quad x + \infty = +\infty; \quad x - \infty = -\infty; \quad \frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0;$
- $\forall x, x \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow x(+\infty) = +\infty; \quad x(-\infty) = -\infty;$
- $\forall x, x \in \mathbb{R}_-^* \Rightarrow x(+\infty) = -\infty; \quad x(-\infty) = +\infty$

$\overline{\mathbb{R}}$ è un insieme totalmente ordinato, ma, come si può vedere facilmente non è un corpo.

I numeri naturali secondo Giuseppe Peano

Sia $\mathbb{N}$ un insieme ed $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (un'applicazione di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$) tale da soddisfare i seguenti assiomi:
(osservazione: $\forall n \in \mathbb{N}, \sigma(n)$ viene detto successivo di n)

- $\exists$ un "signore" che chiamiamo zero e lo indichiamo con il simbolo 0, che appartiene ad $\mathbb{N}$

0 è un numero naturale

- $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sigma(n) \in \mathbb{N}$

Il successivo di un numero naturale è ancora un numero naturale

- $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sigma(n) \neq 0$

Zero non è successivo di alcun numero naturale

- 4. $\forall n, m \in \mathbb{N} \quad \sigma(n) = \sigma(m) \Rightarrow n = m$

Se due numeri naturali hanno successivi uguali, allora i due numeri naturali sono uguali

- 5. Se $T \subseteq \mathbb{N}$ tale che:
 - $0 \in T;$
 - $\forall n \in T \Rightarrow \sigma(n) \in T$

allora $T = \mathbb{N}$.

Principio di Induzione

Per Giuseppe Peano la **coppia logica** ($\mathbb{N}, \sigma$) soddisfacente gli assiomi di cui sopra costituisce i **numeri naturali**.

Sostanzialmente i numeri naturali sono un insieme nel quale è stata introdotta un'applicazione tale da soddisfare tutti gli assiomi di cui sopra.

Osservazione: Il principio di induzione in matematica viene usato sia per definire (definizioni per induzione) sia per dimostrare (dimostrazioni per induzione).

I numeri naturali come sottoinsieme induttivo di $\mathbb{R}$

Introdurre i numeri naturali secondo Peano “è cosa buona e giusta” tuttavia per risulta più comodo considerare $\mathbb{N}$ come sottoinsieme “particolare” di $\mathbb{R}$, così facendo si snellisce di molto il lavoro in quanto in $\mathbb{N}$ si trovano già “tutte” le operazioni con “tutte” le rispettive proprietà; cosa che invece andava fatta con “enorme” fatica, (anche se utile per chiarire molte “cose”) se tali operazioni e proprietà dovevano definirsi a partire dagli assiomi di Peano. Incominciamo col dare la seguente: Definizione di sottoinsieme induttivo di $\mathfrak{R}$

$T \subseteq \mathfrak{R}$, T è Induttivo se :

- $0 \in T$;
- $\forall x \in T \Rightarrow x+1 \in T$.

Osserviamo che $\mathfrak{R}$ stesso è induttivo così pure $\mathfrak{R}^+$ cioè $\{x / x \in \mathfrak{R}, 0 \leq x\}$ risulta induttivo.

Indichiamo con F la famiglia di tutti i sottoinsiemi induttivi di $\mathfrak{R}$ cioè:

$$F = \{X / X \text{ è sottoinsieme induttivo di } \mathfrak{R}\} \neq \emptyset$$

e con $\bigcap_{X \in F} X$ l'intersezione di tutti gli elementi della famiglia F .

Si può dimostrare facilmente che $\bigcap_{X \in F} X$ è induttivo, risulta quindi il più “piccolo” sottoinsieme induttivo di $\mathfrak{R}$ relativamente alla relazione di inclusione.

Chiamiamo **numeri naturali** l'insieme

$$\bigcap_{X \in F} X$$

e lo indichiamo con $\mathbb{N}$.

Intuitivamente esso contiene 0, $0+1=1$, $1+1$ che per definizione chiamiamo due e lo indichiamo con 2, quindi $2+1$ che per definizione lo chiamiamo tre e lo indichiamo con 3, ecc., ecc.,.....

Riassumendo: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$.

I numeri interi relativi

$\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{N} \vee -x \in \mathbb{N}\}$ cioè $\mathbb{Z} = \{0; 1; -1; 2; -2; 3; -3; \dots; n; -n; \dots\}$. risulta: $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{R}$ infatti: per esempio $-1 \in \mathbb{Z}$ e $-1 \notin \mathbb{N}$, $-1/2 \in \mathbb{R}$ e $-1/2 \notin \mathbb{Z}$

I numeri interi irrazionali

$$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} / \exists p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \wedge x = pq^{-1}\}$$

I numeri razionali sono intuitivamente tutte le possibili frazioni, inoltre si ha:

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R};$$

per il momento potrebbe anche essere $\mathbb{Q} = \mathbb{R}$; Ma si può dimostrare per esempio che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ mentre $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$.

Esistenza della radice quadrata in $\mathbb{R}$

Teorema: $\forall y \in \mathbb{R}^+ \exists! x \in \mathbb{R}^+ : x^2 = y$.

(x viene detto radice quadrata aritmetica di y e si indica con $\sqrt{y}$, cioè si pone: $x = \sqrt{y}$)

Alla dimostrazione del teorema premettiamo il seguente lemma preparatorio:

Lemma: $\forall \alpha > 1 \exists \beta > 1 : \beta^2 \leq \alpha$

Dim.: questa dimostrazione è stata già affrontata nel capitolo della logica.

Dimostriamo il teorema:

Unicità: siano $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ : x_1^2 = y \wedge x_2^2 = y$ allora non può che essere $x_1 = x_2$, infatti da $x_1 < x_2$ segue $x_1^2 < x_2^2$ cioè $y < y$, analogamente da $x_1 > x_2$ segue $y > y$.

Esistenza:

se $y = 0$ si ha $x = 0$, se $y = 1$ si ha $x = 1$, rimangono i seguenti due casi:

$$0 < y < 1 \text{ e } y > 1$$

Proviamo il teorema per $y > 1$, consideriamo i seguenti due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$A = \{a \in \mathbb{R}^+ : a^2 \leq y\}$ e $B = \{b \in \mathbb{R}^+ : b^2 \geq y\}$, osserviamo che: $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$ infatti

$1 \in A$ e $y \in B$ ed inoltre $\forall a \in A, \forall b \in B$ si ha $a \leq b$, quindi per l'assioma 12 dei numeri reali

$\exists L \in \mathbb{R}^+ : a \leq L \leq b \forall a \in A \wedge \forall b \in B$ e si può dimostrare che risulta $L^2 = y$; infatti da $L^2 < y$ segue

che $\frac{y}{L^2} > 1$, quindi grazie al lemma testé citato $\exists \beta > 1 : \beta^2 \leq \frac{y}{L^2}$, ossia $\beta^2 L^2 \leq y$, quindi $\beta L \in A$,

d'altro canto essendo $\beta > 1$, si ha $\beta L > L$, ossia esiste un elemento di A maggiore di L , contro il fatto che $a \leq L \forall a \in A$; analogamente si prova che non può essere $L^2 > y$, dunque rimane provato

il teorema quando $y > 1$. Quando $0 < y < 1$, basta osservare che $\frac{1}{y} > 1$, quindi siamo nel caso già

visto, pertanto $\exists L \in \mathbb{R}^+ : L^2 = \frac{1}{y}$, cioè $\left(\frac{1}{L}\right)^2 = y$ e con ciò abbiamo completato la dimostrazione.

I numeri complessi

Vediamo ora di introdurre un nuovo campo: il **corpo commutativo dei numeri complessi $\mathbb{C}$** .

Tale campo contiene (in un certo senso) il corpo dei numeri reali $\mathbb{R}$ e permette di risolvere alcuni problemi che in $\mathbb{R}$ non ammettono soluzione.

Definizione – Si indica con $\mathbb{C}$ l'insieme $\mathbb{R}^2$ in cui si introducono la relazione di uguaglianza e le operazioni di addizione e moltiplicazione nel modo seguente: Se $z = (a, b)$, $w = (c, d)$

$$\text{I. } z = w \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} a = c \wedge b = d$$

$$\text{II. } z + w \stackrel{\text{def}}{=} (a + c, b + d)$$

$$\text{III. } z \cdot w \stackrel{\text{def}}{=} (ac - bd, ad + bc)$$

Teorema – L'insieme $\mathcal{C}$ sopra introdotto è un corpo commutativo rispetto alle operazioni di addizione e moltiplicazioni.

Dim.: Banale se si assume come elemento neutro dell'addizione $e=(0,0)$, come elemento neutro della moltiplicazione $u=(1,0)$ e si osserva che l'opposto di $z=(a,b)$ è $-z=(-a,-b)$ mentre se

$$z=(a,b) \neq (0,0) \text{ il simmetrico di } z \text{ è } z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right).$$

Teorema – (Legge di annullamento del prodotto)

Il prodotto è nullo se e solo se è nullo uno dei fattori.

Teorema - $\mathcal{C}$ possiede un sottocorpo che è isomorfo⁽¹⁾ a $\mathbb{R}$.

Infatti considerato il sottoinsieme $\mathbb{R} \subseteq \mathcal{C}$

$$\mathbb{R} = \{z = (a,b) \in \mathcal{C} : y = 0\}$$

si ha che esso è un sottocorpo di $\mathcal{C}$, inoltre l'applicazione $x \rightarrow (x,0)$ di $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è iniettiva e conserva le operazioni di addizione e moltiplicazione; pertanto possiamo identificare $\mathbb{R}$ con $\mathbb{R}$ e scrivere x in luogo di $(x,0)$.

Consideriamo ora l'elemento $i = (0,1)$. Risulta

$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -(1,0) = -1$$

Con tali convenzioni, tenendo conto che per ogni $z = (a,b) \in \mathcal{C}$ vale la seguente relazione:

$$z = (a,b) = (a,0) + (0,1) \cdot (b,0)$$

possiamo scrivere:

$$z = a + ib$$

Definizione – Il simbolo $z = a + ib$ si dice **forma algebrica** del numero complesso $z = (a,b)$.

Essa riesce particolarmente utile perché il calcolo con i numeri complessi, scritti sotto forma algebrica, si esegue con le consuete regole formali, tenendo presente che $i^2 = -1$.

Per quanto riguarda lo sviluppo di questa parte si rimanda ad un qualsiasi manuale scolastico, cos'è pure per gli sviluppi derivanti dalla **forma trigonometrica dei numeri complessi**.

Altre considerazioni

Siano $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ e $w = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ due numeri complessi scritti in forma trigonometrica, si è visto che:

$$z \cdot w = \rho \cdot r (\cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi))$$

Ora ponendo $f(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$ dalla precedente segue:

$$f(\theta) \cdot f(\varphi) = f(\theta + \varphi).$$

Osserviamo pertanto che l'argomento di un numero complesso si comporta, nel calcolo formale, come l'esponente di una potenza. Nasce così l'idea di porre (per il momento è soltanto una posizione)

$$\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta = e^{i\theta}$$

Nota come **formula di Eulero**.

Dopo di questa posizione, il numero complesso $z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ si può scrivere $z = \rho e^{i\theta}$
Si ha allora:

$$z \cdot w = \rho e^{i\theta} \cdot r e^{i\varphi} = \rho r e^{i(\theta+\varphi)} \text{ e la nota formula di De Moivre diventa } z^n = \rho^n e^{in\theta}.$$

➤ IL LIMITE

Approccio intuitivo

Consideriamo la funzione:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

dov'è definita?

Evidentemente è definita nell'insieme:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\} \text{ quindi } f : A \rightarrow \mathbb{R},$$

cioè f è una funzione reale di una variabile reale definita in A a valori in $\mathbb{R}$.

Osserviamo che:

$$\forall x \in A \Rightarrow f(x) = g(x), \quad \text{dove } g(x) = x + 2;$$

infatti:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2 = g(x), \quad \forall x \in A.$$

Evidentemente $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cioè g è una funzione reale di una variabile reale definita in $\mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}$.

Rappresentiamo graficamente f e g :

x	y
0	2
2	4

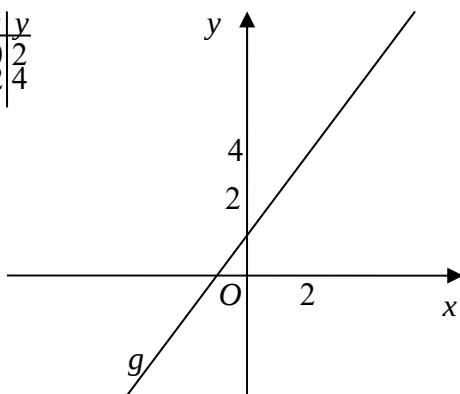


Figura 1

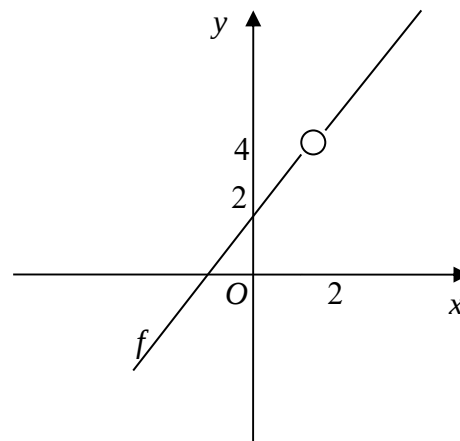


Figura 2

Consideriamo ora anche i seguenti grafici:

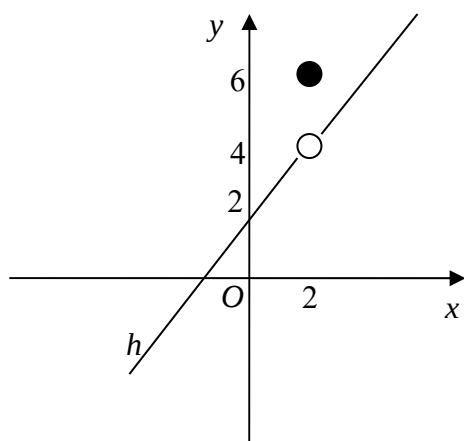


Figura 3

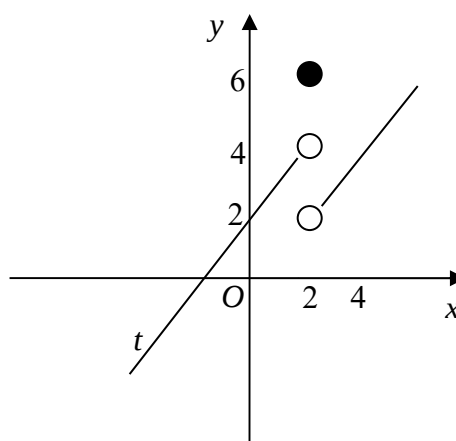


Figura 4

Che espressione analitica hanno le funzioni $h, t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?

Evidentemente si ha:

$$h(x) = \begin{cases} x+2 & \text{per } x \neq 2 \\ 6 & \text{per } x = 2 \end{cases}, \quad t(x) = \begin{cases} x+2 & \text{per } x < 2 \\ 6 & \text{per } x = 2 \\ x & \text{per } x > 2 \end{cases}.$$

Il lettore si chiederà, che “ci frega” della funzione f ?

Ebbene, la funzione f , può essere la traduzione di un problema fisico preciso, come il seguente.

La posizione di un'automobile che va sull'autostrada (considerata praticamente rettilinea) da Barcellona P.G. (ME) a Milazzo (ME), può essere individuata con sufficiente precisione, conoscendo la distanza che la divide dalla posizione iniziale (per esempio, il casello autostradale di Barcellona). Tale distanza dipende dal tempo:

indichiamo con $y = s(x)$, la legge oraria, dove x rappresenta il tempo trascorso da quando l'auto è partita da Barcellona. Se si conosce $s(x)$, come possiamo calcolare la velocità, cioè la variazione di $s(x)$ rispetto al tempo x ?

Osserviamo che è abbastanza facile calcolare la velocità media dell'auto, tra l'istante generico x e l'istante x_0 :

$$V_m = \frac{s(x) - s(x_0)}{x - x_0}; \quad (1)$$

Per essere più precisi, se $s(x) = x^2$ è la legge oraria dell'automobile, allora al tempo $x_0 = 2$ s, l'auto si trova a: $s(x_0) = x_0^2 = 2^2 = 4$ m, cioè a 4 metri dal punto di partenza, se vogliamo la velocità media, per esempio tra $x_0 = 2$ s e $x = 12$ s dobbiamo calcolare anche $s(x) = s(12) = 12^2 = 144$ e poi:

$$V_m = \frac{s(x) - s(x_0)}{x - x_0} = \frac{144 - 4}{12 - 2} = \frac{140}{10} = 14 \text{ m/s}$$

infatti il numeratore $144 - 4$ rappresenta i metri fatti dall'automobile nel tempo di: $12 - 2 = 10$ s .

In molti casi però, la velocità che ci interessa, è quella “istantanea”, per esempio in caso di incidente, non interessa sapere la velocità media ma la velocità nell’istante in cui avviene l’incidente. Ora se consideriamo, in generale, la velocità media tra l’istante $x_0 = 2\text{ s}$ e diversi valori di x si ha:

$$V_m = \frac{s(x) - s(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

Così se vogliamo la velocità media tra l’istante $x_0 = 2\text{ s}$ e l’istante $x = 45$ si ha:

$$V_m = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{45^2 - 4}{45 - 2} = \frac{2025 - 4}{43} = \frac{2021}{43} = 47\text{ m/s}.$$

Se volessimo la velocità all’istante $x_0 = 2\text{ s}$, dovremmo fare la velocità media tra $x_0 = 2\text{ s}$ e $x_0 = 2\text{ s}$ cioè dovremmo calcolare:

$$V_m = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{2^2 - 4}{4 - 4} = \frac{0}{0} = ?$$

La cosa “non è fattibile”, però possiamo “calcolare” la velocità all’istante $x_0 = 2\text{ s}$, con la formula

$$V_m = \frac{s(x) - s(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

dando alla x valori sempre più prossimi al 2.

x	V_m
3	5
2,5	4,5
2,2	4,2
2,01	4,01
2,0000001	4,0000001
1	3
1,5	3,5
1,8	3,8
1,9	3,9
1,99	3,99
1,9999999	3,9999999

Che ne dite di affermare che la velocità dell’automobile all’istante $x_0 = 2\text{ s}$ è 4 m/s ?

Ritorniamo alla:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

$\text{non} \exists f(2)$, però a 2 possiamo “avvicinarci” tanto quanto vogliamo sia da “sinistra” cioè dando alla x valori prima di 2 $x = 1$; $x = 1,5$; ...; $x = 1,9999999$ sia da “destra” ... $x = 3$; $x = 2,5$; ...; $x = 2,0000001$. Dunque abbiamo la tabella di pagina seguente:

x	$f(x)$
3	5
2,5	4,5
2,2	4,2
2,01	4,01
2,0000001	4,0000001
1	3
1,5	3,5
1,8	3,8
1,9	3,9
1,99	3,99
1,9999999	3,9999999

Possiamo senz'altro affermare, almeno intuitivamente, che $f(x)$ si “avvicina” sempre più a 4 man mano che la x si “avvicina” sempre più a 2 .

Questa circostanza si esprime in matematica con la notazione:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4 \quad (2)$$

da leggersi:

“limite per x tendente a 2 di $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$ uguale a 4”

e si dice che 4 è il limite per x tendente a 2 di $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Osserviamo ora i seguenti fatti:

- a. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ $f(2) \text{ non } \exists$;
- b. $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4$ $g(2) = 4$;
- c. $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 4$ $h(2) = 6$;
- d. $\lim_{x \rightarrow 2} t(x) \text{ non } \exists$ $t(2) = 6$;
- e. a rigore, perché $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ sarebbe proprio 4 e non 4,0000000000000001 per esempio?
- f. “quanto” ci si deve avvicinare a 2 affinché sia 4 il $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$?
- g. che senso ha parlare di limite anche nel caso della h e t ?

Ma a rigore, cosa significa veramente la scrittura $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$, viste le a.,b.,c.,d.,e.,f.,g.,ecc.,ecc.,?

Per queste ragioni ma non solo, nasce l'esigenza di dare una definizione rigorosa di limite!!!

Un primo approccio rigoroso

Partiamo dalla “scrittura” $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$, ed incominciamo con l’osservare che l’affermazione:

$\frac{x^2 - 4}{x - 2}$ si “avvicina” sempre più a 4 man mano che la x si “avvicina” sempre più a 2 ;

equivale alla seguente:

la quantità $\frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4$, in valore assoluto, cioè la quantità $\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right|$ si “avvicina” sempre più a 0 man mano che la x si “avvicina” sempre più a 2 o ciò che è lo stesso,

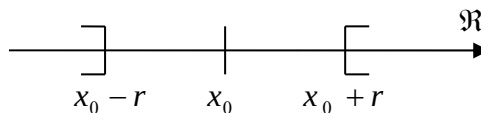
la quantità $\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right|$ si mantiene minore di un qualunque numero positivo ε , a patto di prendere la x “sufficientemente vicina” a 2 .

Richiamiamo ora alcune nozioni di **topologia della retta**.

Nozione di Intorno Sferico

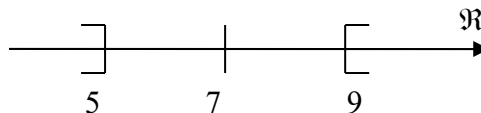
Siano $\mathbb{R}$ l’insieme dei numeri reali, $x_0 \in \mathbb{R}$; $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Si chiama intorno sferico di centro x_0 e raggio r l’insieme:

$$I(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} \text{ o anche } I(x_0, r) =]x_0 - r, x_0 + r[.$$



Per esempio se $x_0 = 7$ e $r = 2$ si ha:

$$I(7, 2) = \{x \in \mathbb{R} : |x - 7| < 2\} \text{ ossia } I(7, 2) =]7 - 2, 7 + 2[=]5, 9[;$$



In altri termini, $]5, 9[$ è l’insieme di tutti i numeri reali compresi tra 5 e 9 tranne 5 e 9.

Si osservi inoltre che:

$$|x - 7| < 2 \Leftrightarrow x \in]7 - 2, 7 + 2[\text{ ossia } |x - 7| < 2 \Leftrightarrow x \in]5, 9[\Leftrightarrow 5 < x < 9;$$

più ingenerale:

$$|x - x_0| < r \Leftrightarrow x \in]x_0 - r, x_0 + r[\Leftrightarrow x_0 - r < x < x_0 + r;$$

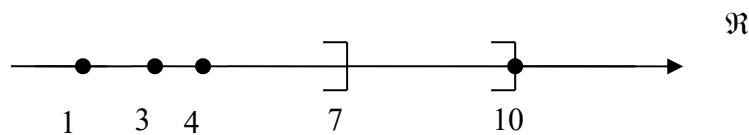
in altri termini, dire che $|x - x_0| < r$ o dire che $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$ o dire che $x_0 - r < x < x_0 + r$ è la stessa cosa.

Nozione di Punto di Accumulazione

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$; diciamo che x_0 è un **punto di accumulazione** per A , se comunque prendiamo un intorno di x_0 , esiste almeno un punto diverso da x_0 che appartiene sia a questo intorno sia ad A . In simboli: $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap A - \{x_0\} \neq \emptyset$. Si noti che un punto può essere di accumulazione pur non appartenendo ad A , e di contro, pur appartenendo all'insieme può non essere di accumulazione, evidentemente può appartenere ed essere di acc. e può non appartenere e non essere di acc.. Riassumendo in simboli abbiamo:

$$x_0 \text{ è di accumulazione per } A \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \text{ si ha }]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap A - \{x_0\} \neq \emptyset.$$

Il seguente esempio aiuta a capire meglio: $A = \{1, 3, 4\} \cup]7, 10]$
graficamente



$1, 3, 4 \in A$ ma non sono di accumulazione, $7 \notin A$ ma è di accumulazione, tutti gli $x \in]7, 10]$ appartengono ad A e sono di accumulazione.

Definizione rigorosa

Definizione - Siano $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale di una variabile reale ($A \subseteq \mathbb{R}$), $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per A , L un numero reale; diciamo che la funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ **converge** al numero reale L (o anche che **ammette limite** L) per x tendente ad x_0 in A e scriviamo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L,$$

da leggersi “limite per x tendente ad x_0 di effe di x uguale ad L ”, se accade quanto segue:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \quad (1);$$

cerchiamo di capirne di più “traducendo” la (1):

$\forall \varepsilon > 0$ sostanzialmente significa “comunque prendiamo un intorno di L ” ossia $]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$;

$\exists \delta > 0$ significa “esiste un intorno di x_0 ” ossia $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$;

: significa “tale che”;

$\forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta$ significa “per ogni x appartenente ad A , $x \neq x_0$, $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$;

$\Rightarrow$ significa “si ha”;

$|f(x) - L| < \varepsilon$ significa “ $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ ”.

Pertanto la (1) “suona” così:

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste come conseguenza un $\delta > 0$, tale che, per ogni x appartenente ad A , $x - x_0$ in valore assoluto compreso tra zero e δ , si ha $f(x) - L$ in valore assoluto minore di ε .
Osservazione:

E' bene notare che si può presentare una delle seguenti eventualità: $x_0 \in A$ aut $x_0 \notin A$,
 ossia $\exists f(x_0)$ aut non esiste $f(x_0)$; ai fini del limite per x tendente ad x_0 , il presentarsi dell'una o dell'altra eventualità non comporta alcuna differenza; inoltre se $\exists f(x_0)$ e se esiste il $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, non è detto che sia $f(x_0) = L$, anzi in generale risulta $f(x_0) \neq L$, ancora può benissimo accadere che esista il $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ e non $f(x_0)$ o viceversa, vedasi figure 1 - 2 - 3 - 4 di pag. 2 e pag. 3, dove in tutti i quattro casi la (1) rende "giustizia". Dunque con questa definizione rigorosa, tutte le perplessità esposte a fine pagina 5, trovano risposta e non solo quelle.

In altri termini, la (1), può anche esprimersi così:

$$\forall V(L) \exists U(x_0): \forall x \in U(x_0) \cap A - \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V(L) \quad (2)$$

Cerchiamo di "tradurre":

$\forall V(L)$ significa "comunque prendiamo un intorno $V(L)$ di L ";

$\exists U(x_0)$ significa "esiste un intorno $U(x_0)$ di x_0 ";

: significa "tale che"

$\forall x \in U(x_0) \cap A - \{x_0\}$ significa "per ogni x appartenente sia ad $A - \{x_0\}$ che all'intorno $U(x_0)$ ";

$\Rightarrow$ significa "si ha";

$f(x) \in V(L)$ significa " $f(x)$ appartiene a $V(L)$ ".

Pertanto la (2) "suona" così:

Comunque prendiamo un intorno $V(L)$ di L , esiste come conseguenza un intorno $U(x_0)$ di x_0 , tale che, per ogni x appartenente sia ad $A - \{x_0\}$ che a quest'intorno $U(x_0)$, segue che $f(x)$ appartiene a $V(L)$.

Osserviamo che la (2) viene conosciuta in letteratura come la "**definizione unificatrice**" di limite, in quanto, in essa si prescinde dall'essere $x_0 \in \mathfrak{R}$ e $L \in \mathfrak{R}$, mentre la (1) va adattata di volta in volta a seconda che $x_0 \in \mathfrak{R}$ e $L \in \mathfrak{R}$; $\overline{x_0} \in \mathfrak{R}$ e $L \in \mathfrak{R}$; ... ecc., ecc.. Tuttavia entrambi risultano a dir poco interessanti oltre che "suggestive" ed "eleganti".

Riprendiamo ora la $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, dire che $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$, significa quindi:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in A, 0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \varepsilon \quad (3).$$

Risolviamo la: $\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \varepsilon$; essendo nel nostro caso $x \neq 2$ in quanto $0 < |x - 2|$, si ha:

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2$$

Quindi la disequazione $\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \varepsilon$ è equivalente alla:

$$|x + 2 - 4| < \varepsilon \Rightarrow |x - 2| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < x - 2 < \varepsilon \Rightarrow 2 - \varepsilon < x < 2 + \varepsilon;$$

cioè le soluzioni della $\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \varepsilon$ sono $2 - \varepsilon < x < 2 + \varepsilon$, quindi scegliendo come δ proprio ε

si ha: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \varepsilon : \forall x \in A, 0 < |x - 2| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \varepsilon$, cioè per ogni scelta di $\varepsilon > 0$ si

riesce a trovare comunque un intorno di 2, tale che la quantità $\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right|$ si mantenga minore di questo ε , a patto di prendere la x in questo intorno di 2 e ovviamente (in questo caso) $x \neq 2$.

Tanto per capire meglio come funziona “la cosa” diamo ad ε qualche valore e facciamo i conti:

per $\varepsilon = 0,1$ si ha $\delta = \varepsilon = 0,1$ e siamo sicuri che

$$\forall x \in A, x \neq 2, 2 - 0,1 < x < 2 + 0,1 \text{ ossia } 1,9 < x < 2,1 \Rightarrow \left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < 0,1$$

facciamo qualche prova, per esempio vediamo cosa succede per $x = 1,99$

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| = \left| \frac{1,99^2 - 4}{1,99 - 2} - 4 \right| = \left| \frac{-0,0399}{-0,01} - 4 \right| = |3,99 - 4| = |-0,01| = 0,01 \text{ appunto minore di } 0,1$$

proviamo ora per $x = 2,09$

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| = \left| \frac{2,09^2 - 4}{2,09 - 2} - 4 \right| = \left| \frac{0,3681}{0,09} - 4 \right| = |4,09 - 4| = |0,09| = 0,09 < 0,1.$$

Ancora per $\varepsilon = 0,0001$ si ha $\delta = \varepsilon = 0,0001$ dunque:

$$\forall x \in A, x \neq 2, 2 - 0,0001 < x < 2 + 0,0001 \text{ ossia } 1,9999 < x < 2,0001 \Rightarrow \left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < 0,0001$$

per $x = 1,99993$ si ha: $\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| = \left| \frac{1,99993^2 - 4}{1,99993 - 2} - 4 \right| = \dots = |-0,00007| = 0,00007 < 0,0001.$

La definizione rigorosa di limite, può essere data anche seguendo un'altra strada, altrettanto valida, questa definizione fa uso della nozione di **funzione continua**. Alcuni autori preferiscono introdurre

la nozione di funzione continua, utilizzando la definizione di limite testè data, lo scrivente preferisce introdurre questa nozione indipendentemente dalla definizione di limite.

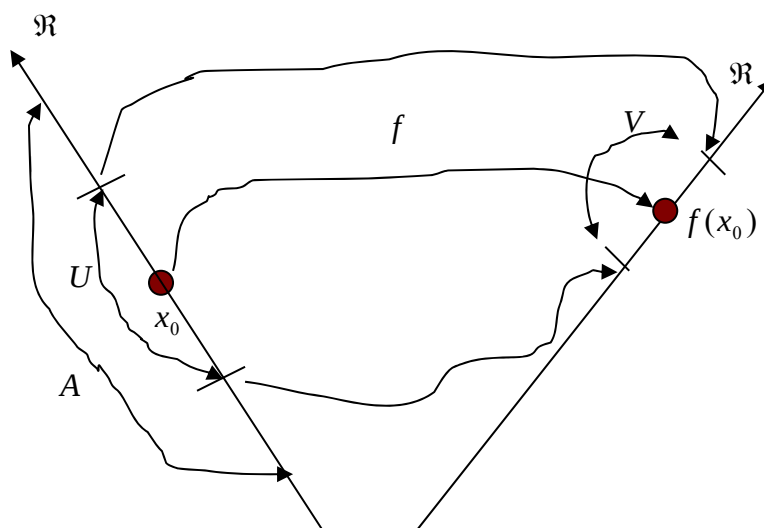
Funzioni continue

Per esprimere in maniera intuitiva che un'applicazione $f : A \rightarrow \mathfrak{R}$ ($A \subseteq \mathfrak{R}$), è **continua nel punto** $x_0 \in A$, diciamo che $f(x)$ è arbitrariamente “vicino” a $f(x_0)$ a patto di prendere x sufficientemente “vicino” a x_0 .

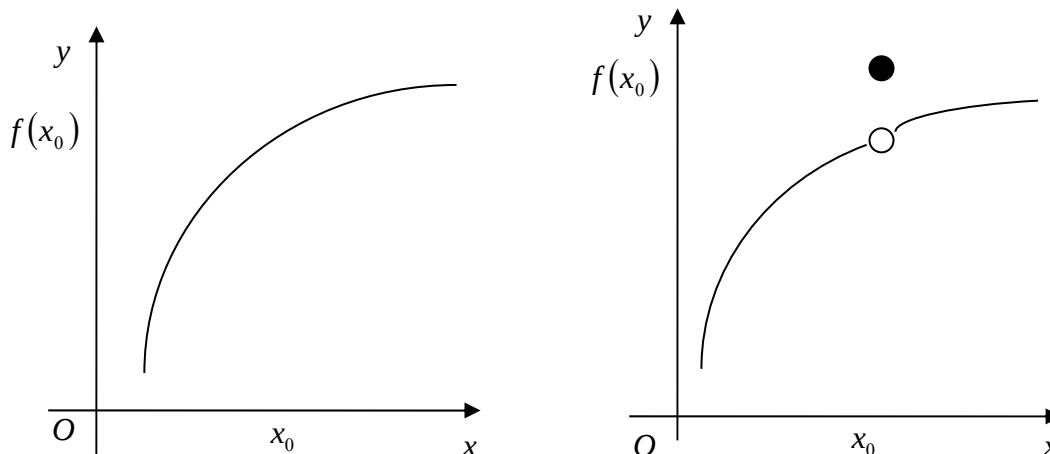
Ammettendo che la nozione matematica di “intorno” corrisponde alla nozione intuitiva di “vicinanza”, siamo allora condotti alla seguente:

Definizione - Sia $f : A \rightarrow \mathfrak{R}$ un'applicazione ($A \subseteq \mathfrak{R}$) e $x_0 \in A$.

L'applicazione f si dice continua nel punto x_0 , se, per ogni intorno V di $f(x_0)$ in $\mathfrak{R}$, esiste un intorno U di x_0 in A tale che $f(U) \subseteq V$. In simboli: $\forall V(f(x_0)) \exists U(x_0) : f(U) \subseteq V$



In termini di “ ε e δ ” si ha: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.



Il grafico di sinistra è quello di una funzione continua in x_0 quello di destra di una funzione non continua in x_0 .

Altra definizione rigorosa di limite

Definizione - Siano $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale di una variabile reale ($A \subseteq \mathbb{R}$), $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per A , L un numero reale; diciamo che la funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ **converge** al numero reale L (o anche che **ammette limite** L) per x tendente ad x_0 in A e scriviamo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L,$$

da leggersi “limite per x tendente ad x_0 di effe di x uguale ad L ”, se la funzione

$$f^* : A \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

così definita:

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per } x \in A - \{x_0\} \\ L & \text{per } x = x_0 \end{cases}$$

risulta essere continua in x_0 .

Osservazione:

Da questa definizione scaturiscono subito le seguenti considerazioni:

Si può presentare una delle seguenti eventualità: $x_0 \in A$ aut $x_0 \notin A$, ossia $\exists f(x_0)$ aut non esiste $f(x_0)$; ai fini del limite per x tendente ad x_0 , il presentarsi dell'una o dell'altra eventualità non comporta alcuna differenza; inoltre se $\exists f(x_0)$ e se esiste il $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, non è detto che sia $f(x_0) = L$, anzi in generale risulta $f(x_0) \neq L$, ancora può benissimo accadere che esista il $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ e non $f(x_0)$ o viceversa.

Teorema - Siano $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale di una variabile reale ($A \subseteq \mathbb{R}$), $x_0 \in A$ un punto di accumulazione per A ; condizione necessaria e sufficiente affinché $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ sia continua in x_0 è che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Osservazione:

Pertanto la nozione di limite per x tendente ad x_0 , da qualche informazione utile quando la funzione non è continua in x_0 oppure quando non è definita in tale punto.

Teorema - Siano $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale di una variabile reale ($A \subseteq \mathbb{R}$), $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per A ; condizione necessaria e sufficiente affinché $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ converga ad un numero reale L , ai sensi di quest'ultima definizione, per x tendente ad x_0 in A , è che:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Dim.: ovvia a partire dalla definizione di funzione continua in un punto.

Osservazione:

Da quest'ultimo teorema si evince la perfetta equivalenza delle due definizioni.

I grafici seguenti dovrebbero aiutarci:

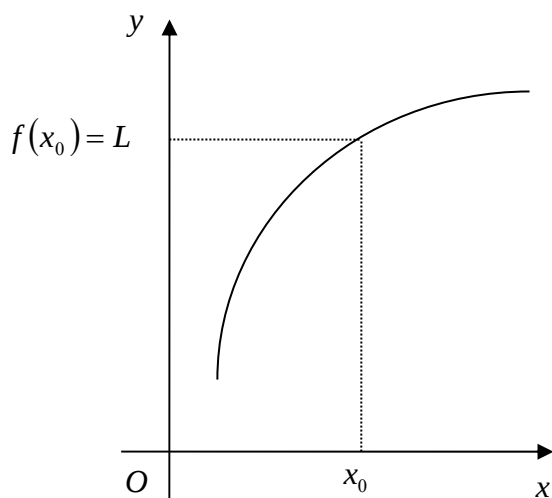


Figura 5

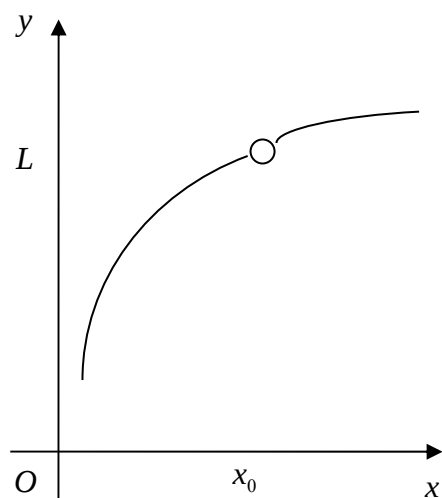


Figura 6

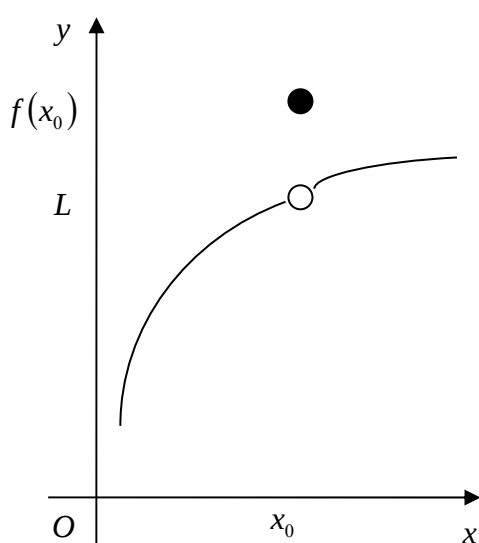


Figura 7

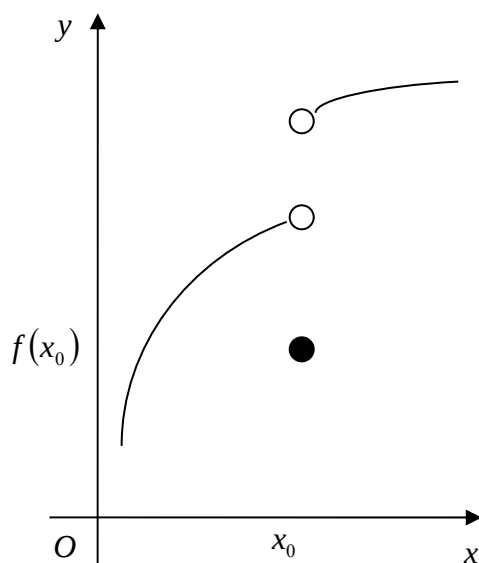


Figura 8

Nella figura 5 abbiamo il grafico di una funzione continua in x_0 e pertanto $L = f(x_0)$;

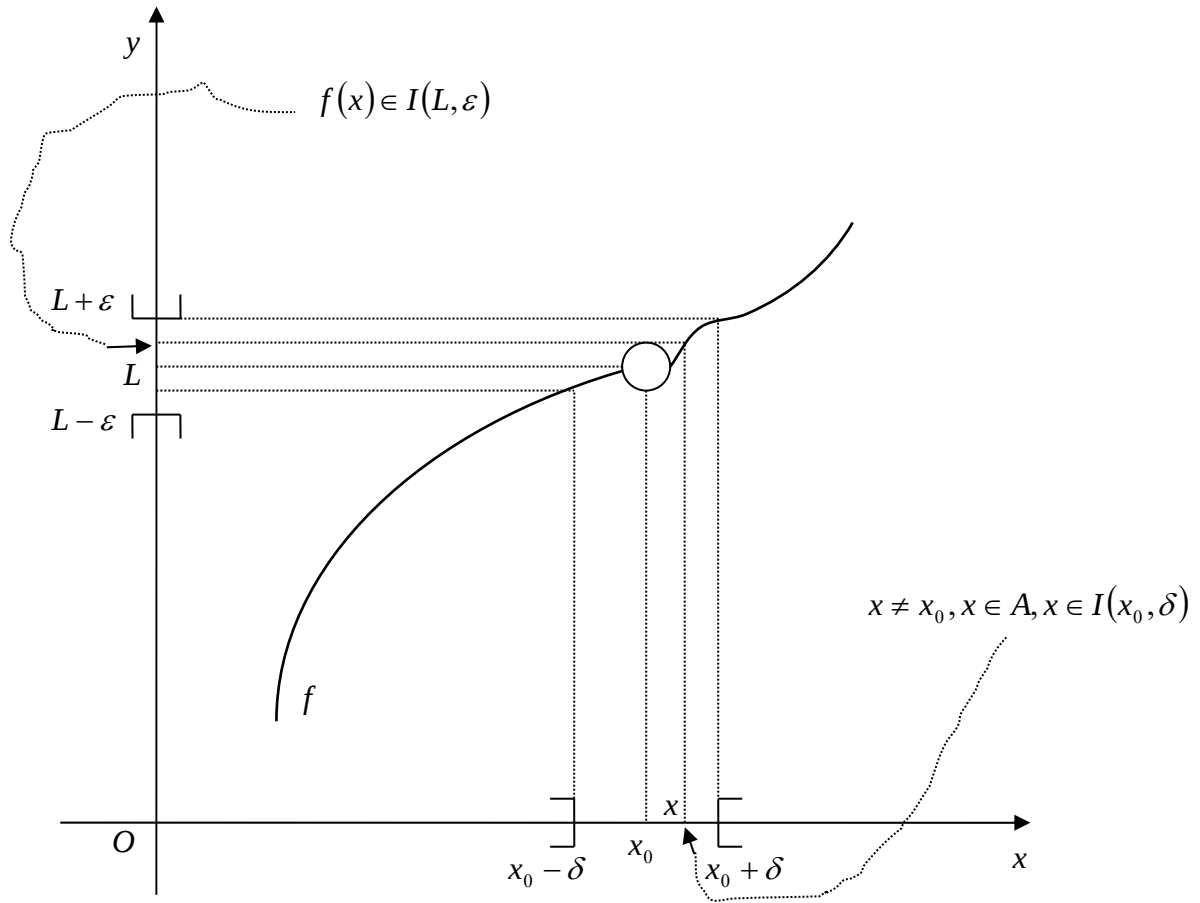
nella figura 6 abbiamo il grafico di una funzione non definita in x_0 che ammette limite L ;

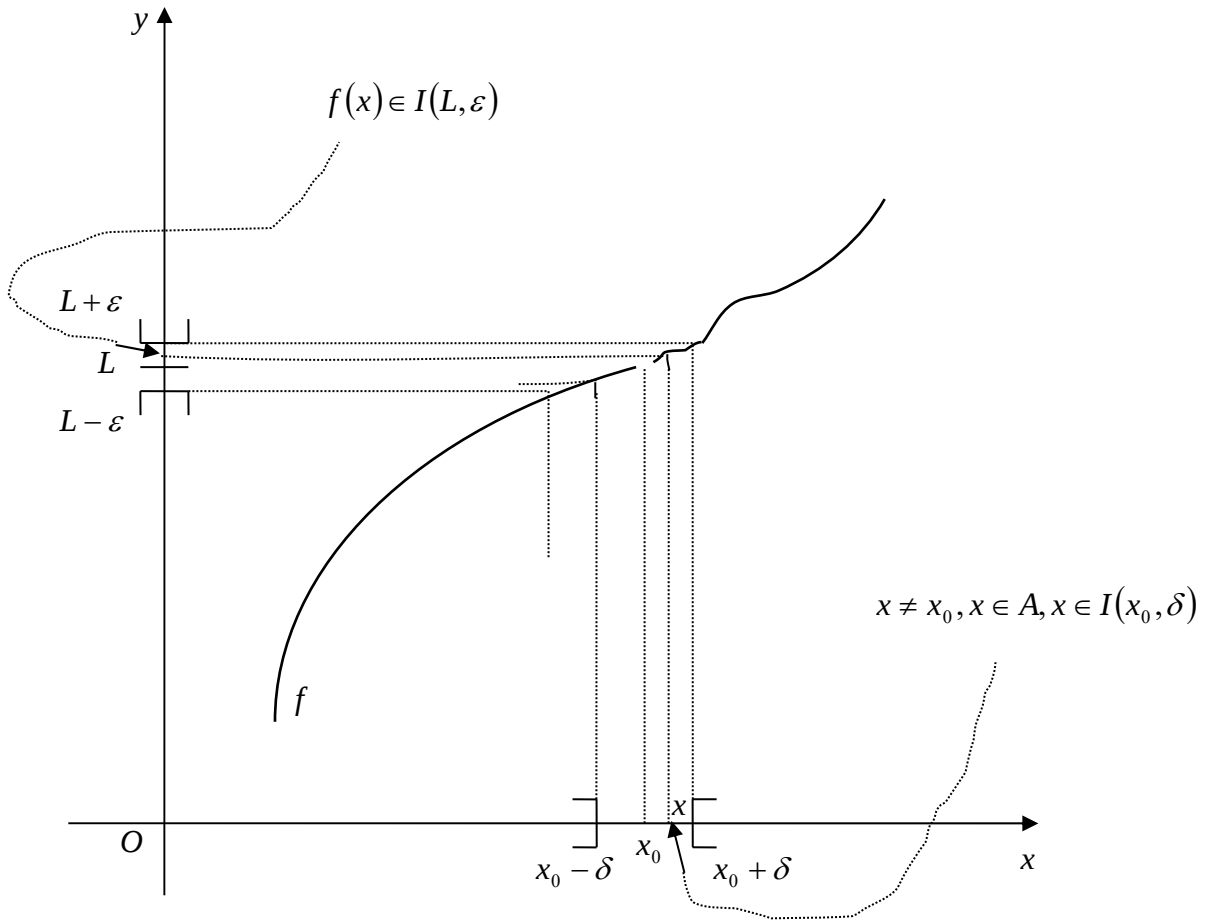
nella figura 7 abbiamo il grafico di una funzione non continua in x_0 con $L \neq f(x_0)$;

nella figura 8 abbiamo il grafico di una funzione non continua in x_0 per la quale $\text{non } \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Cerchiamo ora di analizzare il seguente grafico alla luce della:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \quad (1)$$





Inesorabilmente $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$

➤ LA DERIVATA

1.1 Definizione - Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale definita nell'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e sia x_0 interno ad I . Preso arbitrariamente $x \in I - \{x_0\}$, consideriamo la funzione $r(x_0, \cdot): I - \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$, definita da:

$$r(x_0, x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

essa viene detta rapporto incrementale della f in x_0 relativamente all'incremento $x - x_0$ della variabile indipendente. Se esiste finito il

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

si dice che f è **derivabile** in x_0 ; tale limite viene chiamato **derivata** di f in x_0 e si indica con una delle seguenti notazioni:

$$f'(x_0), (Df)(x_0), \left(\frac{df}{dx} \right)_{x_0}, \dot{f}(x_0).$$

Se si ha: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$, (risp. $-\infty$).

Allora si dice che f ha derivata $+\infty$ (risp. $-\infty$) nel punto x_0 .

Esempio

Consideriamo la funzione $f(x) = x^2$, evidentemente essa è definita in tutto $\mathbb{R}$, cioè si ha $I = \mathbb{R}$ e sia inoltre $x_0 = 3$. Quindi abbiamo: $r(x_0, x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - 3^2}{x - 3} = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$.

Ancora: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6$. Pertanto la

funzione $f(x) = x^2$ è derivabile nel punto $x_0 = 3$ e la derivata della funzione in questo punto, vale 6, cioè si ha: $f'(3) = 6$. Cosa si può dire della funzione $f(x) = x^3$ nel punto $x_0 = 2$? Cosa si può dire della funzione $f(x) = x^2$ nel generico punto x_0 ? Cosa si può dire della funzione $f(x) = x^3$ nel generico punto x_0 ? Cosa si può dire della funzione $f(x) = x^n$ nel generico punto x_0 ?

1.2 Definizione - In qualche caso in cui non esiste oppure non può essere considerato il limite del rapporto incrementale per $x \rightarrow x_0$, ad esempio quando x_0 è un estremo di I , può capitare che esista, il limite di esso per $x \rightarrow x_0^+$ (risp. $x \rightarrow x_0^-$). Si dice allora che esiste la **derivata destra** (risp. **sinistra**) di f in x_0 e si scrive:

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}; \quad f'_s(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Evidentemente se esiste $f'(x_0)$ esistono anche $f'_d(x_0)$ ed $f'_s(x_0)$ e si ha: $f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$.

Osservazione su alcune notazioni: se si pone $\Delta x = x - x_0$ e $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ si ha: $r(x_0, \Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

e quindi: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$; ancora se si pone $x = x_0 + h$ si ha: $r(x_0, h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ e quindi:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

1.3 Definizione - Se f è derivabile in ogni punto di I si dice che **f è derivabile in I** . In questo caso, per ogni $x \in I$, esiste il corrispondente valore $f'(x)$ della derivata della funzione f nel punto x , resta così definita in I una “nuova” funzione che indichiamo con $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ alla quale si dà il nome di **funzione derivata prima** (o semplicemente derivata) di f .

1.4 Definizione - Se $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in I$ si dice che la funzione f è **due volte derivabile** (o anche che ammette **derivata seconda**) in x_0 e tale derivata seconda si indica con

una delle seguenti notazioni: $f''(x_0)$, $(D^2 f)(x_0)$, $\left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right)_{x_0}$, $\ddot{f}(x_0)$.

Se f' è derivabile in ogni punto di I si dice che **f è due volte derivabile in I** . In questo caso, per ogni $x \in I$, esiste il corrispondente valore $f''(x)$ della derivata seconda della funzione f nel punto x , resta così definita in I una “nuova” funzione che indichiamo con $f'' : I \rightarrow \mathbb{R}$ alla quale si dà il nome di **funzione derivata seconda** (o semplicemente derivata seconda o del secondo ordine) di f .

Se $f'' : I \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in I$ si dice che la funzione f è **tre volte derivabile** (o anche che ammette **derivata terza**) in x_0 e tale derivata terza si indica con una delle seguenti notazioni:

$$f'''(x_0), (D^3 f)(x_0), \left(\frac{d^3 f}{dx^3} \right)_{x_0}, \ddot{\ddot{f}}(x_0).$$

Se f'' è derivabile in ogni punto di I si dice che **f è tre volte derivabile in I** . In questo caso, per ogni $x \in I$, esiste il corrispondente valore $f'''(x)$ della derivata terza della funzione f nel punto x , resta così definita in I una “nuova” funzione che indichiamo con $f''' : I \rightarrow \mathbb{R}$ alla quale si dà il nome di **funzione derivata terza** (o semplicemente derivata terza o del terzo ordine) di f .

Così proseguendo, se $k \in \mathbb{N}$, può accadere che f sia k volte derivabile (o anche che ammette derivata d'ordine k) in x_0 ; tale derivata si indica con una delle seguenti notazioni:

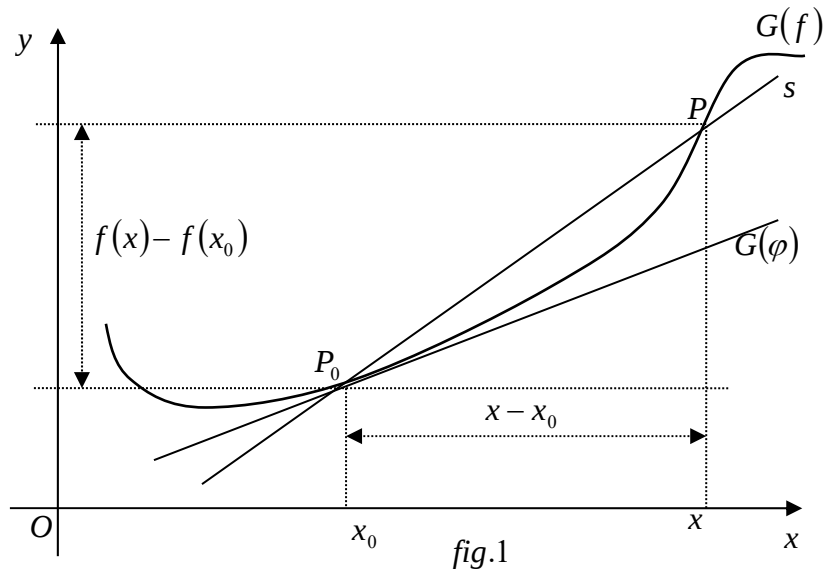
$$f^{(k)}(x_0), (D^k f)(x_0), \left(\frac{d^k f}{dx^k} \right)_{x_0}.$$

Per uniformità di notazione è spesso conveniente porre:

$$f^0(x) = (D^0 f)(x) = f(x), \quad \forall x \in I.$$

SIGNIFICATO GEOMETRICO DI DERIVATA

Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale di una variabile reale, definita nell'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ ed x_0 un punto interno ad I . Sia $G(f)$ il grafico della f su di un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy (fig. 1)



Siano P_0 e P i due punti di ascissa x_0 ed x . Allora il rapporto $r(x_0, x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$,

rappresenta il coefficiente angolare della retta **secante** al grafico di f nei punti P_0, P .

Se la f è derivabile in x_0 , l'espressione

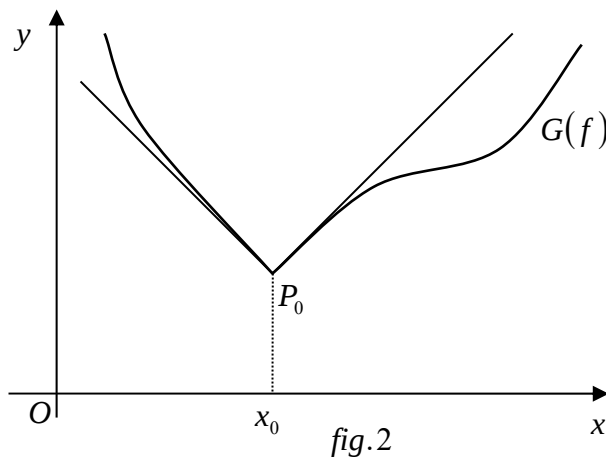
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

rappresenta il coefficiente angolare di una retta passante per il punto $P_0(x_0, f(x_0))$; questa retta si dice **tangente al grafico** di f nel punto di ascissa x_0 .

Tale retta è dunque il grafico $G(\varphi)$ della funzione (lineare) $\varphi(x_0, \cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$(1) \quad \varphi(x_0, x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Pertanto la derivabilità di f in x_0 rappresenta geometricamente la circostanza che $G(f)$ ha nel punto $(x_0, f(x_0))$, la retta tangente. Se accade che in x_0 esistono la derivata destra $f'_d(x_0)$ e la derivata sinistra $f'_s(x_0)$ ma non esiste $f'(x_0)$ (fig. 2): si ha che $f'_d(x_0)$ ed $f'_s(x_0)$ rappresentano i coefficienti angolari di due rette passanti per $P_0(x_0, f(x_0))$, e che si dicono rispettivamente **semitangente destra** e **semitangente sinistra** del $G(f)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$.



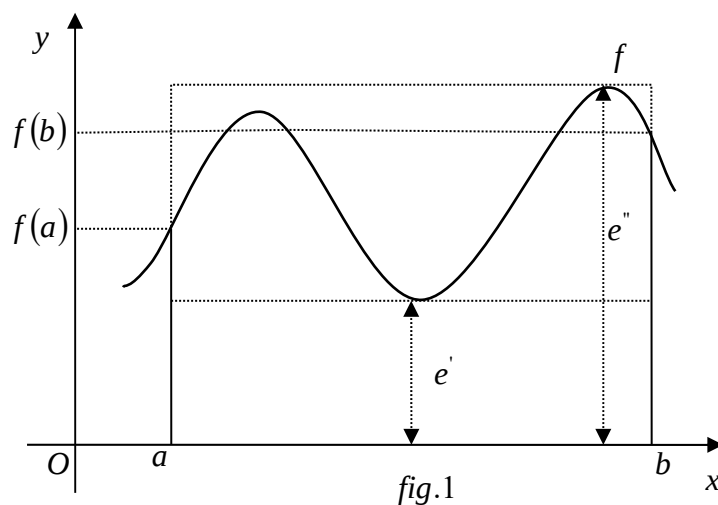
➤ IL CALCOLO INTEGRALE

La teoria dell'integrazione considera due concetti fondamentali: quello di “Integrale Definito” e quello di “Primitiva”. La connessione di questi due concetti, ad opera di Leibniz e Newton, fu il grande successo iniziale dell'Analisi Infinitesimale.

Noi ci occuperemo della teoria dell'integrazione secondo Riemann, soffermandoci in particolare sulla teoria dell'integrazione delle funzioni reali di una variabile reale, definite e limitate in intervalli finiti.

APPROCCIO INTUITIVO

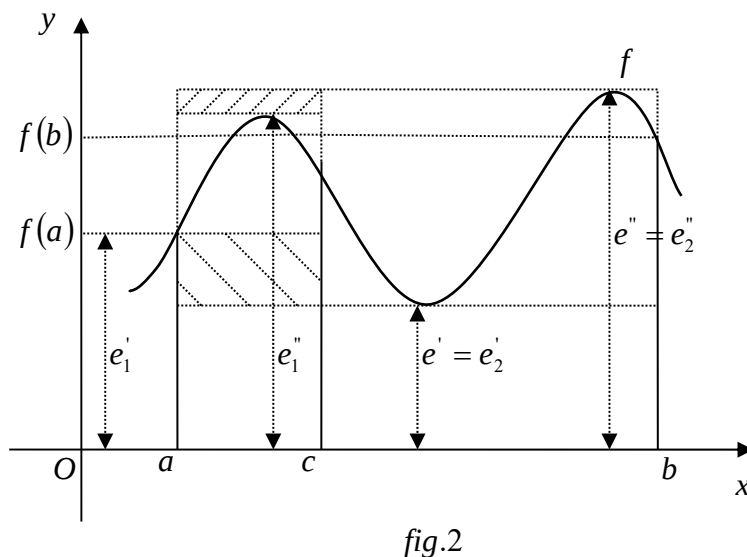
Prendiamo in esame la seguente figura:



ci proponiamo di calcolare l'area S della parte di piano compresa tra la curva marcata in figura, (grafico di una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$), le rette di equazioni $x = a$, $x = b$ e l'asse x . Evidentemente si ha:

$$(b-a)e' \leq S \leq (b-a)e''.$$

Consideriamo ora la fig. 2, dove abbiamo diviso l'intervallo $[a, b]$ prendendo un punto $c \in]a, b[$.



Evidentemente si ha:

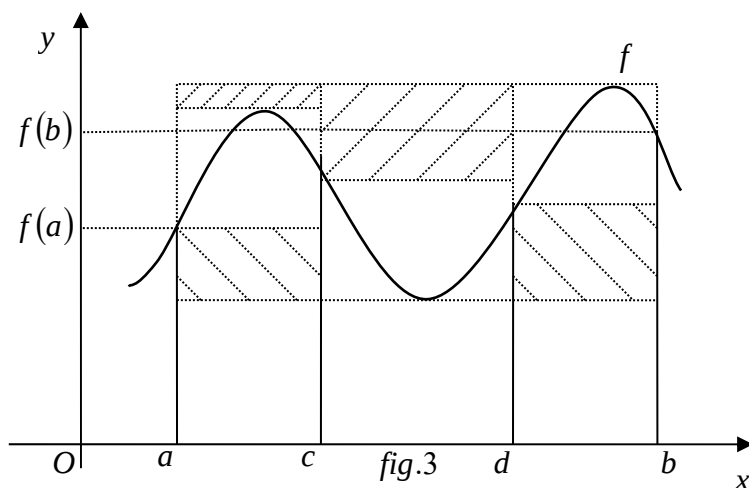
$$(c-a)e'_1 + (b-c)e'_2 \leq S \leq (c-a)e''_1 + (b-c)e''_2.$$

Con

$$(c-a)e'_1 + (b-c)e'_2 \geq (b-a)e' \text{ si è aggiunto il rettangolo tratteggiato così } \backslash,$$

$$(c-a)e''_1 + (b-c)e''_2 \leq (b-a)e'' \text{ si è sottratto il rettangolo tratteggiato così } /.$$

Consideriamo ora la fig. 3, dove abbiamo diviso l'intervallo $[a, b]$ prendendo un ulteriore punto $d \in]a, b[$.



Evidentemente si ha:

$$(c-a)e'_1 + (d-c)e'_2 + (b-d)e'_3 \leq S \leq (c-a)e''_1 + (d-c)e''_2 + (b-d)e''_3.$$

Con

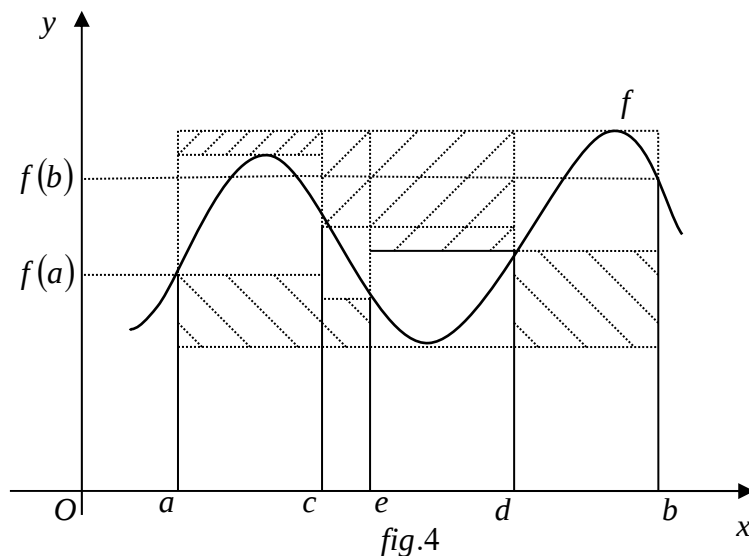
$$(c-a)e'_1 + (d-c)e'_2 + (b-d)e'_3 \geq (c-a)e'_1 + (b-c)e'_2 \geq (b-a)e'$$

si è aggiunto un altro rettangolo tratteggiato così $\backslash$,

$$(c-a)e''_1 + (d-c)e''_2 + (b-d)e''_3 \leq (c-a)e''_1 + (b-c)e''_2 \leq (b-a)e''$$

si è sottratto un altro rettangolo tratteggiato così $/$.

Consideriamo ora la fig. 4, dove abbiamo diviso l'intervallo $[a, b]$ prendendo un ulteriore punto $e \in]a, b[$



Dalle figure 1, 2, 3, 4 si vede come suddividendo l'intervallo $[a, b]$, aggiungendo punti, le somme di prodotti con gli e'_k aumentano mentre le somme di prodotti con gli e''_k diminuiscono, fermo restando che l'area S è sempre compresa tra queste somme. Pertanto se prendessimo "infiniti" punti, si intuisce che sia le somme con gli e'_k , sia le somme con gli e''_k coinciderebbero con S .

APPROCCIO RIGOROSO

1.1 Definizione - Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso ($a < b$), $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ un insieme finito di numeri reali tale che: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Si chiama **suddivisione** di $[a, b]$ operata da X la famiglia di intervalli parziali:

$$B_k = [x_{k-1}, x_k] \quad (k = 1, \dots, n).$$

Nel seguito useremo senza ambiguità il simbolo X per indicare la suddivisione operata dall'insieme di punti X .

Nell'insieme $\Omega(a, b)$ delle suddivisioni di $[a, b]$ si può introdurre una relazione d'ordine:

1.2 Definizione - Date due suddivisioni $X, X' \in \Omega(a, b)$ si dice che X' è **più fine** di X e si scrive $X \prec X'$, se l'insieme X è contenuto nell'insieme X' .

E' chiaro che, se la suddivisione X' è più fine di X , allora l'insieme X' è ottenuto inserendo altri punti nell'insieme X .

Inoltre, se X_1 e X_2 sono due suddivisioni di $[a, b]$, allora l'insieme di punti $X_1 \cup X_2$ opera una suddivisione di $[a, b]$ che è più fine sia di X_1 che di X_2 .

1.3 Definizione - Data una suddivisione $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dell'intervallo $[a, b]$, si dice **parametro di finezza di X** il numero: $\delta = \max\{\delta_k = x_k - x_{k-1}, \quad k = 1, \dots, n\}$.

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una data suddivisione di $[a, b]$, poniamo:

$$e'_k = \inf\{f(x) : x \in B_k\},$$

$$e''_k = \sup\{f(x) : x \in B_k\}.$$

Se f è limitata, ponendo

$$e' = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}, \quad e'' = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

si riconosce facilmente che

$$e' = \min\{e'_k : k = 1, \dots, n\},$$

$$e'' = \max\{e''_k : k = 1, \dots, n\}.$$

1.4 Definizione - Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una suddivisione di $[a, b]$, le espressioni:

$$S'(f, X) = \sum_{k=1}^n e'_k \delta_k, \quad S''(f, X) = \sum_{k=1}^n e''_k \delta_k$$

si dicono, rispettivamente, **somma inferiore** e **somma superiore** della funzione f relativa alla suddivisione X .

1.5 Lemma - Siano X_1 e X_2 due suddivisioni di $[a, b]$ con X_2 più fine di X_1 . Allora si ha:

$$S'(f, X_1) \leq S'(f, X_2), \quad S''(f, X_1) \geq S''(f, X_2)$$

(in altri termini la somma inferiore di una funzione f relativa ad una certa suddivisione, è minore o uguale, della somma inferiore relativa ad una suddivisione più fine, mentre avviene al contrario per la somma superiore). In questa trattazione Liceale omettiamo la dimostrazione del lemma.

1.6 Teorema - Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e X_1 ed X_2 due suddivisioni qualunque di $[a, b]$, si ha:

$$S'(f, X_1) \leq S''(f, X_2)$$

(in altri termini una qualunque somma inferiore è minore o uguale di una qualunque somma superiore). In questa trattazione Liceale omettiamo la dimostrazione del teorema.

1.7 Definizione - Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata; i numeri reali

$$I'(f) = \sup \{ S'(f, X) : X \in \Omega(a, b) \}, \quad I''(f) = \inf \{ S''(f, X) : X \in \Omega(a, b) \};$$

si dicono, rispettivamente, **Integrale Inferiore** ed **Integrale Superiore** di f in $[a, b]$ **secondo Riemann**. Inoltre, se:

$$I'(f) = I''(f),$$

la funzione f si dice Integrabile secondo Riemann

e tale comune valore si chiama:

Integrale definito di f in $[a, b]$ (oppure esteso all'intervallo $[a, b]$)

e si indica con il simbolo:

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx = I'(f) = I''(f).$$

Esempio: Consideriamo la funzione $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da: $f(x) = x^2$, si può calcolare, utilizzando la definizione testé data, con **non poca fatica** che: $\int_1^4 x^2 dx = 21$.

Evidentemente questo valore **21**, è l'**area** della parte di piano compresa tra le rette di equazione $x = 1$, $x = 4$, l'asse delle x ed il grafico della funzione f .

Osservazione

Fortunatamente la determinazione dell'integrale definito di una funzione f in $[a, b]$ (sempre che sia integrabile) viene effettuata, **non utilizzando la definizione data**, ma (grazie al Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale) **facendo ricorso** ad un'altra nozione, quella di "**Primitiva**" o più in generale di "**Integrale indefinito**" di una funzione.

Calcolo dell'integrale $\int_1^4 x^2 dx$, utilizzando la definizione.

Osserviamo che la funzione data $f(x) = x^2$, nell'intervallo considerato $[1,4]$, risulta: limitata, continua e monotona strettamente crescente. Dividiamo ora l'intervallo limitato $[1,4]$ in n intervalli uguali, mediante l'insieme $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ di $n+1$ punti, presi come segue:

$$1 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_{n-1} < x_n = 4.$$

Evidentemente l'ampiezza δ_k del generico intervallo $B_k = [x_{k-1}, x_k]$, anzi di ogni intervallo vale:

$$\delta_k = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n}, \text{ cioè si ha: } \delta_k = \frac{3}{n}, \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Inoltre essendo la funzione strettamente crescente si ha:

$$e'_k = f(x_{k-1}) = x_{k-1}^2, \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots, n; \quad e''_k = f(x_k) = x_k^2, \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

In particolare osservando che:

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1 + 1\frac{3}{n}, \quad x_2 = 1 + 2\frac{3}{n}, \dots, x_{k-1} = 1 + (k-1)\frac{3}{n}, \quad x_k = 1 + k\frac{3}{n}, \dots, x_{n-1} = 1 + (n-1)\frac{3}{n}, \quad x_n = 1 + n\frac{3}{n}$$

si ha:

$$e'_1 = f(x_0) = x_0^2 = 1^2 = 1, \quad e'_2 = f(x_1) = x_1^2 = \left(1 + 1\frac{3}{n}\right)^2, \quad e'_3 = f(x_2) = x_2^2 = \left(1 + 2\frac{3}{n}\right)^2, \dots,$$

$$e'_k = f(x_{k-1}) = x_{k-1}^2 = \left(1 + (k-1)\frac{3}{n}\right)^2, \dots, e'_n = f(x_{n-1}) = x_{n-1}^2 = \left(1 + (n-1)\frac{3}{n}\right)^2;$$

$$e''_1 = f(x_1) = x_1^2 = \left(1 + 1\frac{3}{n}\right)^2, \dots, e''_{n-1} = f(x_{n-1}) = x_{n-1}^2 = \left(1 + (n-1)\frac{3}{n}\right)^2, e''_n = f(x_n) = x_n^2 = \left(1 + n\frac{3}{n}\right)^2$$

Pertanto:

$$1. \quad S'(f, X) = \sum_{k=1}^n e'_k \delta_k = \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n e'_k = \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n \left[1 + \frac{6}{n}(k-1) + \frac{9}{n^2}(k-1)^2 \right] = \dots = 21 - \frac{45}{2n} + \frac{9}{2n^2};$$

$$2. \quad S''(f, X) = \sum_{k=1}^n e''_k \delta_k = \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n e''_k = \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n \left[1 + \frac{6}{n}k + \frac{9}{n^2}k^2 \right] = \dots = 21 + \frac{45}{2n} + \frac{9}{2n^2}.$$

Quindi abbiamo:

$$I'(f) = \sup\{S'(f, X) : X \in \Omega(a, b)\} = 21, \quad I''(f) = \inf\{S''(f, X) : X \in \Omega(a, b)\} = 21; \text{ Ossia:}$$

$$\int_1^4 x^2 dx = 21.$$

Esercizio proposto

Si calcoli l'integrale $\int_1^2 x^3 dx$.

N.B. Nella determinazione delle 1. e 2., dopo aver esplicitato ulteriormente le sommatorie

si è fatto ricorso alle: $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Questionario 1

1. La negazione della proposizione $\exists x : (\forall y, x^2 > y) \vee (\exists z : x < z)$ è:

a. $\exists x : (\forall y, x^2 \leq y) \vee (\exists z : x \geq z);$

b. $\forall x : (\exists y, x^2 > y) \vee (\forall z : x < z);$

c. $\forall x (\exists y : x^2 \leq y) \wedge (\forall z, x \geq z).$

2. Siano A e B due insiemi non vuoti ed $f \subset A \times B$ una relazione tra A e B . Si dice che f è una **funzioni** (o **applicazioni**) se:

a. $\forall x \in A \exists! y \in B : y = f(x);$

b. $\forall y \in B \exists! x \in A : y = f(x);$

c. $\text{dom}(f) = A.$

3. Quale delle seguenti espressioni esprime il teorema di Eulero:

a. $\overline{AB} = 2R \sin \alpha;$

b. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha;$

c. $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$

4. L'equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ rappresenta:

a. Una circonferenza;

b. un ellisse;

c. una retta.

5. La funzione tangente è definita nell'insieme:

a. $\mathbb{R} - \left\{ x \in \mathbb{R}, x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \right\};$

b. $\mathbb{R} - \left\{ x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \right\};$

c. $\left\{ x \in \mathbb{R}, x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \right\}.$

6. Quale delle seguenti espressioni esprime correttamente il concetto di limite:

a. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon;$

b. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in A, 0 < |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon;$

c. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in A, 0 < |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon.$

7. quale delle seguenti espressioni esprime correttamente la definizione di derivata in un punto:

a. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0};$

b. $r(x_0, x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0};$

c. nessuna delle precedenti.

8. Una funzione è integrabile secondo Riemann se:

a. $I'(f) = I''(f);$

b. $S'(f, X_1) = S''(f, X_2);$

c. nessuna delle precedenti.

9. Una primitiva di $f(x) = \operatorname{tg} x$ è:

a. $-\ln|\cos x|;$

b. $\ln|\cos x|;$

c. $\cos \ln|x|.$

10. Il $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x^{\operatorname{tg} x} - 1}{x^2}$ vale:

a. 1;

b. 0;

c. e.

UNITA' DIDATTICA 2 SCIENZE

CAPITOLO 2.1

ELEMENTI DI CINEMATICA E CALCOLO VETTORIALE

❖ Una somma strana

Richiamiamo la somma tra vettori sia pure graficamente:



Figura 1

dati i vettori di figura 1, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, per costruire graficamente la somma, basta “spostare”, per esempio $\vec{w}$, come risulta nella figura 2:

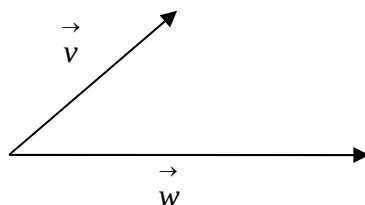


Figura 2

quindi costruire il parallelogramma di figura 3 e assumere come somma il vettore $\vec{r}$ diagonale del parallelogramma di figura 4.

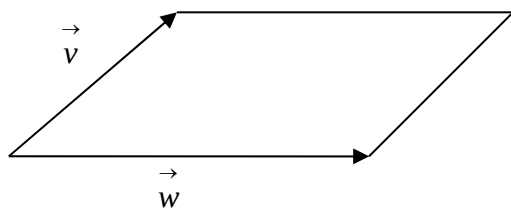


Figura 3

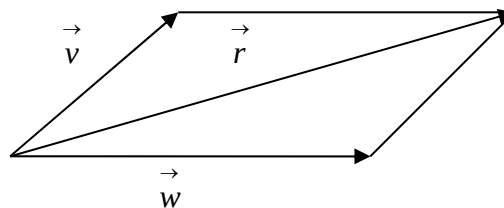


Figura 4

- Perché si assume per somma proprio la diagonale?
- Quanto vale il modulo di $\vec{r}$ (figura 4), se il modulo di $\vec{v}$ è 5 e quello di $\vec{w}$ è 8?

Il lettore poco attento direbbe: $5 + 8 = 13$, quindi il modulo di $\vec{r}$ è 13!!!

Il lettore attento dirà: dipende dall'angolo che i due vettori formano!!!

Cerchiamo di dare una risposta, sul perché si assume per somma proprio la diagonale

I vettori sono “**enti matematici astratti**” dotati di **modulo, direzione e verso**; servono per rappresentare certi tipi di grandezze, dette appunto **grandezze vettoriali** (forze, spostamenti, velocità, accelerazioni, ...).

Questi i vettori in un certo senso assomigliano ai numeri, (**cosa sono i numeri?** lasciamo stare per ora); così come il numero 20 può rappresentare 20 *euro*, 20 *belle ragazze*, 20 *banane*, ... il vettore $\vec{v}$ di modulo 5, direzione quella della retta a cui appartiene e verso quello marcato in figura, può rappresentare una forza di 5 Newton, fatta in quella direzione e in quel verso, uno spostamento di 5 Km fatto in quella direzione e in quel verso ...

20 *euro* e 15 *euro* danno 35 *euro* fin qui non ci sono dubbi!! un oggetto su di un tavolo tirato da due forze, come in figura 5:

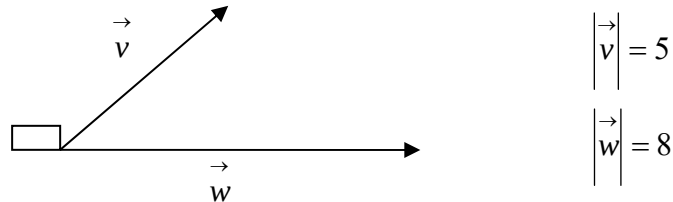


Figura 5

non segue né la direzione di $\vec{v}$, né la direzione di $\vec{w}$, ma quella della **diagonale del parallelogramma** individuato in figura 3,

perché è così bisognerebbe interrogare il “Padre Eterno”,

il fisico ha solo il compito di osservare, e appunto si osserva quanto detto, anzi c'è di più, segue il verso di questa diagonale come marcato in figura 4, e lo stesso effetto di $\vec{v}$ e $\vec{w}$, viene reso da un'unica forza di intensità proprio uguale alla lunghezza di questa diagonale!!! Ecco il perché!!!

Anche gli spostamenti, le velocità, le si comportano così

Quindi bisogna introdurre la “MATEMATICA” adatta per i vettori!!!

Il lettore attento, a questo punto si chiederà:

esiste una formula matematica che permette, noti i moduli di $\vec{v}$ e $\vec{w}$ oltre all'angolo che essi formano, che ci permetta di individuare il modulo di $\vec{r}$?

La risposta è affermativa!!!

IL MODULO DEL RISULTANTE DI DUE VETTORI FORMANTI UN ANGOLO DI 30°

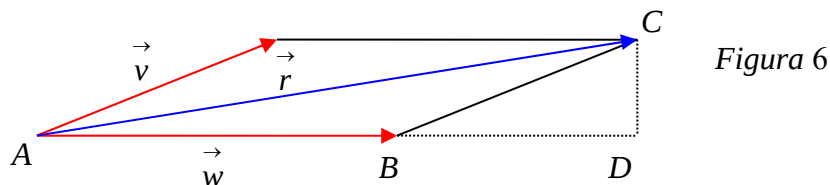


Figura 6

Il modulo di $\vec{r}$ è l'ipotenusa del triangolo rettangolo $\triangle ADC$, quindi applicando il teorema di Pitagora ed osservando che: $\overline{CD} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{v}{2}$, (cateto opposto all'angolo di 30°) e $\overline{BD} = \frac{\overline{BC}}{2} \sqrt{3} = \frac{v}{2} \sqrt{3}$ (cateto opposto all'angolo di 60°) si ottiene quanto cercato.

$$r = \overline{AC} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2} = \sqrt{(\overline{AB} + \overline{BD})^2 + \overline{CD}^2} = \sqrt{\left(w + \frac{v}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2} = \sqrt{w^2 + wv\sqrt{3} + \frac{v^2}{4}3 + \frac{v^2}{4}} =$$

$$= \sqrt{w^2 + wv\sqrt{3} + v^2}. \text{ Riassumendo: } r = \sqrt{w^2 + wv\sqrt{3} + v^2}.$$

IL MODULO DEL RISULTANTE DI DUE VETTORI FORMANTI UN ANGOLO DI 60°

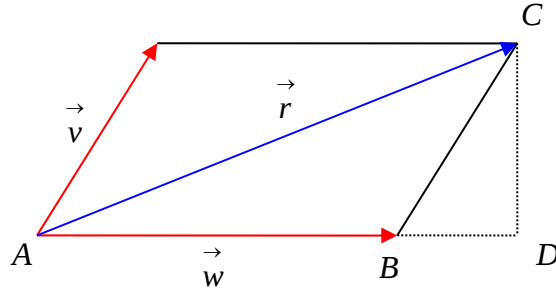


Figura 7

Il modulo di $\vec{r}$ è l'ipotenusa del triangolo rettangolo $\triangle ADC$, quindi applicando il teorema di Pitagora ed osservando che: $\overline{BD} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{v}{2}$, (cateto opposto all'angolo di 30°) e $\overline{CD} = \frac{\overline{BC}}{2}\sqrt{3} = \frac{v}{2}\sqrt{3}$ (cateto opposto all'angolo di 60°) si ottiene quanto cercato.

$$r = \overline{AC} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2} = \sqrt{(\overline{AB} + \overline{BD})^2 + \overline{CD}^2} = \sqrt{\left(w + \frac{v}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{w^2 + wv + \frac{v^2}{4} + \frac{v^2}{4}3} =$$

$$= \sqrt{w^2 + wv + v^2}. \text{ Riassumendo: } r = \sqrt{w^2 + wv + v^2}.$$

IL MODULO DEL RISULTANTE DI DUE VETTORI FORMANTI UN ANGOLO DI 45°

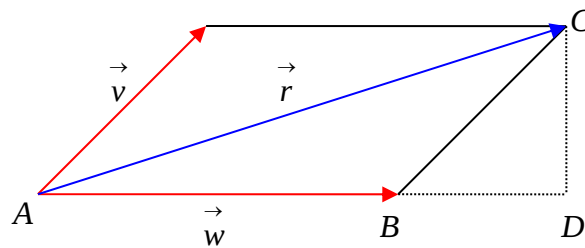


Figura 8

Il modulo di $\vec{r}$ è l'ipotenusa del triangolo rettangolo $\triangle ADC$, quindi applicando il teorema di Pitagora ed osservando che: $\overline{BD} = \overline{DC} = \frac{\overline{BC}}{\sqrt{2}} = \frac{v}{\sqrt{2}}$, (il triangolo $\triangle BDC$ è mezzo quadrato) si ottiene quanto cercato.

$$r = \overline{AC} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2} = \sqrt{(\overline{AB} + \overline{BD})^2 + \overline{CD}^2} = \sqrt{\left(w + \frac{v}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{w^2 + wv\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{v^2}{2} + \frac{v^2}{2}} =$$

$$= \sqrt{w^2 + wv\sqrt{2} + v^2}. \text{ Riassumendo: } r = \sqrt{w^2 + wv\sqrt{2} + v^2}.$$

IL MODULO DEL RISULTANTE DI DUE VETTORI FORMANTI UN ANGOLO DI 120°

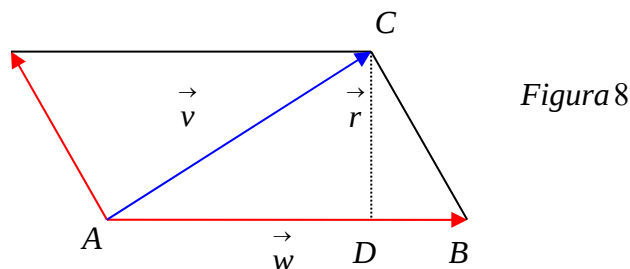


Figura 8

Si può dimostrare che vale la seguente formula: $r = \sqrt{w^2 - wv + v^2}$. La dimostrazione viene lasciata per esercizio al lettore.

IL MODULO DEL RISULTANTE DI DUE VETTORI FORMANTI UN ANGOLO DI α°

$$\text{Vale la seguente: } r = \sqrt{v^2 + w^2 + 2vw \cos \alpha}.$$

❖ La legge oraria nel moto rettilineo uniforme

Situazione problematica

Nella figura 1 il signor Nino passa davanti al semaforo quando la lancetta del cronometro è sullo zero. Il semaforo è l'origine del riferimento per la misura della posizione. Supponiamo che Nino si muova di moto rettilineo uniforme, cioè che la velocità sia costante e uguale a 2 m/s . Come varia la posizione di Nino al passare del tempo?

$t = 0 \text{ s}$

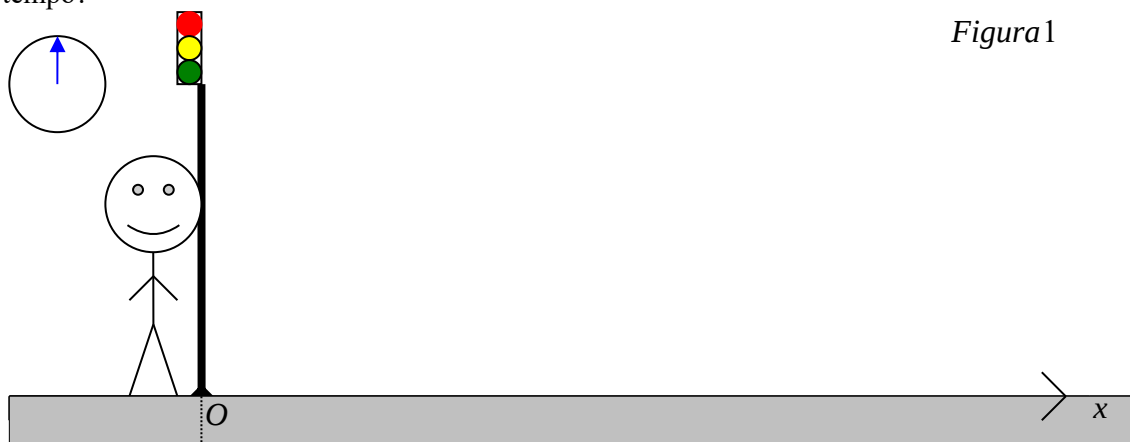


Figura 1

Costruiamo una tabella spazio-tempo.

Tempo (s)	0	1,0	2,0	3,0	4,0	...	10,0	...	t
Spazio (m)	0	2	4	6	8	...	20	...	x

Tabella 1

Alla fine della tabella abbiamo inserito un tempo generico t ed il corrispondente spazio percorso x . Evidentemente le due grandezze, tempo e spazio, sono direttamente proporzionali. Infatti quando t raddoppia anche x raddoppia; se t triplica anche x triplica ecc., ecc..

La legge oraria del moto rettilineo uniforme

Ogni valore dello spazio si ottiene moltiplicando per 2 il corrispondente valore del tempo. Dunque anche lo spazio generico x si può ottenere moltiplicando per 2 il tempo generico t . Pertanto si ha: $x = 2 \cdot t$.

Questa relazione fra x e t si chiama **legge oraria** del moto; essa permette di calcolare lo spazio percorso dal corpo (Nino) in un generico istante t .

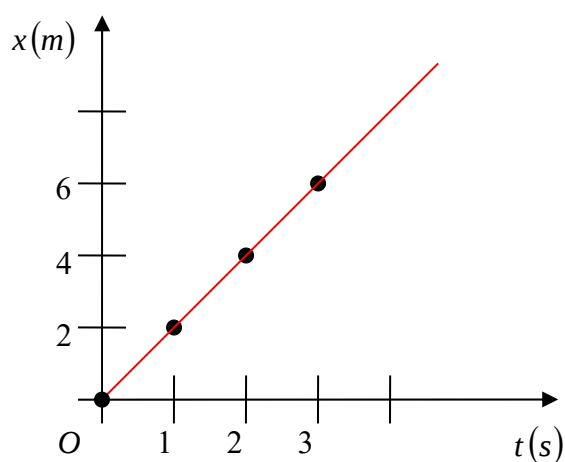
Esempio 1: Quale spazio percorre Nino in 3 minuti? $3 \text{ min} = 180 \text{ s}$ quindi: $x = (2 \text{ m/s}) \cdot (180 \text{ s}) = 360 \text{ m}$.
Se la velocità di Nino fosse stata $1,5 \text{ m/s}$ (per esempio) la legge oraria diventava: $x = 1,5 \cdot t$.

In generale la legge oraria del moto rettilineo uniforme è: $x = v \cdot t$.

Essendo: x lo spazio (m); t il tempo (s); v la velocità costante $\left(\frac{m}{s}\right)$.

La rappresentazione grafica del moto

Dalla tabella 1 si ha:



CAPITOLO 2.2

PRINCIPI DI CONSERVAZIONE

Molto importanti in fisica, sono le leggi di **conservazione dell'energia meccanica e della quantità di moto**. Riteniamo noti i concetti fondamentali di: lavoro, energia potenziale gravitazionale, forze conservative e non conservative, lavoro della forza elastica e energia potenziale elastica, energia cinetica, sistema fisico isolato, quantità di moto, portata di un condotto, liquido ideale, equazione di continuità per i fluidi.

Uno dei grandi obiettivi della fisica classica è quello di prevedere l'evoluzione di un fenomeno, ad esempio in meccanica a partire dalle leggi della dinamica e della cinematica si riesce a determinare per alcuni moti l'equazione oraria, che permette di determinare istante per istante la velocità raggiunta da un punto materiale e lo spazio percorso dopo un certo intervallo di tempo.

Cosa accade però quando non risulta possibile esprimere matematicamente la forza agente sul sistema, ovvero non si può scrivere l'espressione della forza in relazione ad un'altra grandezza? Può succedere che l'equazione fondamentale della dinamica $\sum F = ma$, non possa essere risolta matematicamente, ciò accade spesso nella realtà ad esempio quando le forze in gioco sono variabili in modo significativo: basti pensare agli urti oppure alle montagne russe, dove la velocità cambia punto per punto e la forza agente sul carrello non può essere scritta mediante una relazione matematica. Per tutti questi casi occorre elaborare un modo nuovo di affrontare il problema ovvero un diverso approccio.

Ci si pone in un modello efficace, quello di un **sistema isolato**, cioè di un sistema dove non agiscono forze esterne che possono essere attriti o forze dissipative. Per fare un esempio si può considerare la caduta di un oggetto pesante da una certa altezza e supporre l'oggetto tanto piccolo da poter trascurare l'attrito con l'aria, inoltre si può ipotizzare che la giornata sia limpida, e non ci sia vento, allora, anche se il corpo non ha dimensioni piccole ed è di forma sferica, le forze che si oppongono alla caduta sono abbastanza trascurabili, in questo caso, quando l'oggetto si trova fermo alla quota h risulta dotato dell'energia potenziale $U = mgh$ e quando cade, ciò che perde in termini

di energia potenziale viene integralmente recuperato sotto forma di energia cinetica $K = \frac{1}{2}mv^2$,

pertanto la somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica ovvero dell'**energia meccanica** E , in ogni istante rimane costante:

$$mgh + \frac{1}{2}mv^2 = Cost.$$

L'equazione scritta, valida nel modello considerato, permette di prevedere ad esempio la massima velocità dell'oggetto in caduta libera in ogni punto della traiettoria ed in ogni istante, tale valore costituisce un punto di riferimento ben preciso da poter valutare il valore della velocità nella caduta reale.

Così, se h_1 ed h_2 sono due quote dove l'oggetto di massa m , si trova in due istanti di tempo diversi, supponiamo $h_1 > h_2$ e v_1 e v_2 sono i moduli delle rispettive velocità, si ha:

$$mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2.$$

Da questa equazione si può ricavare la grandezza incognita.

Consideriamo ora il caso di una molla ideale di coefficiente elastico k posta su un piano orizzontale privo di attrito con appeso alla sua estremità un oggetto di massa m in posizione di riposo, se la molla viene allungata (o compressa) di un tratto x , il lavoro occorrente è $L = \frac{1}{2}kx^2$, che viene accumulato sotto forma di energia potenziale elastica se si vincola il corpo.

Nel momento in cui viene lasciato libero, l'energia potenziale elastica diminuisce mentre aumenta quella cinetica compensando integralmente la perdita della detta energia potenziale, alle distanze x_1 ed x_2 dalla posizione di riposo, se v_1 e v_2 sono i moduli delle rispettive velocità, la conservazione dell'energia meccanica si esprime nella forma seguente:

$$\frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}mv_2^2.$$

Da questa equazione si può ricavare la grandezza incognita.

Quanto detto in questi due classici esempi si può ripetere in generale:

Nei sistemi isolati, cioè in quei sistemi dove non agiscono forze esterne, l'energia meccanica si conserva.

Teoricamente il principio di conservazione dell'energia meccanica si può ricavare nel seguente modo. Essendo la forza in gioco conservativa, cioè, il lavoro per spostare un corpo non dipende dal percorso, ma solo, dalle posizioni iniziali e finali, esiste la funzione energia potenziale U ed è tale che il lavoro per spostare un corpo è pari alla sua variazione cambiata di segno, in simboli:

$$L = -\Delta U.$$

Per il teorema dell'energia cinetica, si ha anche: $L = \Delta K$. Dunque:

$$\Delta U + \Delta K = 0;$$

ossia:

$$\Delta(U + K) = 0;$$

e quindi:

$$U + K = E = Cost.$$

Un'altra grande legge di conservazione è quella della quantità di moto che affronta ancora una volta quelle situazioni in cui una forza risulta estremamente variabile in tempi molto piccoli, ad esempio negli urti. In questi casi non si può certo determinare il valore dell'intensità delle forze in gioco, ma si può comunque valutare un valore medio di tale intensità.

Partiamo dalla seconda legge della dinamica espressa in termini di variazione della quantità di moto, come la scrisse Newton, cioè:

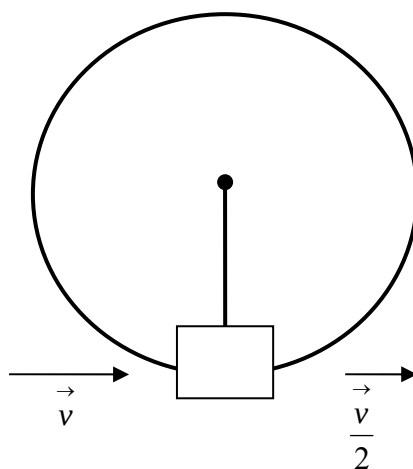
$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{q}}{\Delta t}.$$

Il principio di conservazione della quantità di moto si può ricavare teoricamente partendo da questa relazione supponendo che la risultante di tutte le forze agenti sul sistema sia nulla, ovvero il sistema

risulti isolato, dunque si ha: $\frac{\Delta \vec{q}}{\Delta t} = 0$; e dunque: $\Delta \vec{q} = 0$, pertanto si ha: $\vec{q} = Cost$.

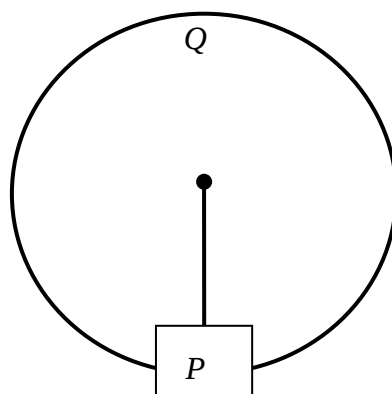
Esempi

- Un proiettile di massa m e velocità v attraversa un pendolo di massa M ed emerge con velocità $\frac{v}{2}$, come in figura.



Se la massa del pendolo è appesa all'estremo di un filo di lunghezza L , qual è il minimo valore di v per cui il pendolo possa compiere un giro completo? Trattare il caso generale e quello particolare in cui $M/m = 6$ ed $L = 9,80 m$.

Svolgimento:



Affinché il pendolo faccia un giro completo l'accelerazione centripeta nel punto più alto Q , deve essere uguale all'accelerazione di gravità g . Dunque deve essere $g = \frac{V_Q^2}{L}$ essendo V_Q la velocità tangenziale

nel punto più alto Q e L il raggio della traiettoria. Quindi in Q l'energia deve essere $\frac{1}{2}MV_Q^2 + Mg2L$.

Pertanto si ha: $\frac{1}{2}MV_P^2 = \frac{1}{2}MV_Q^2 + Mg2L$. Quindi, dalla: $mv = m\frac{v}{2} + MV_P$, ricaviamo $V_P = \frac{mv}{2M}$

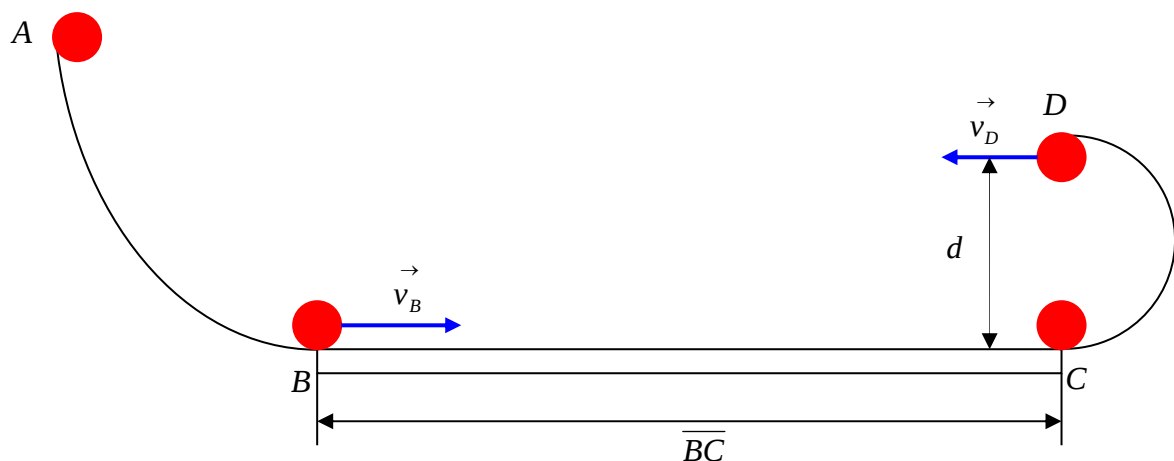
dalla $g = \frac{V_Q^2}{L}$ ricaviamo $V_Q = \sqrt{gL}$, dunque: $V_P^2 = \frac{m^2 v^2}{4M^2}$ e $V_Q^2 = gL$. Allora dalla

$$\frac{1}{2}MV_P^2 = \frac{1}{2}MV_Q^2 + Mg2L \text{ si ha: } \frac{1}{2}M \frac{m^2 v^2}{4M^2} = \frac{1}{2}M gL + Mg2L ; \text{ ossia:}$$

$$m^2 v^2 = 4M^2 gL + 16M^2 gL ; \text{ e quindi: } v = \sqrt{\frac{20M^2 gL}{m^2}} \text{ e finalmente: } v = \sqrt{\frac{20M^2 gL}{m^2}} = 2\frac{M}{m}\sqrt{5gL}.$$

Dunque se $M/m = 6$ ed $L = 9,80m$ si ha: $v = 2\frac{M}{m}\sqrt{5gL} = 2 \cdot 6 \sqrt{5 \cdot 9,81 \cdot 9,80} = 263,10m/s$.

- Una pallina è posta nel punto A in cima a uno scivolo curvilineo a un'altezza $h = 5m$ dal suolo. Strisciando senza attrito, cade sino al punto B e prosegue la sua corsa nel tratto orizzontale $\overline{BC} = 10m$, la cui superficie presenta un coefficiente di attrito dinamico $k_d = 0,2$. Giunta al punto C , percorre senza attrito una semicirconferenza di diametro $d = 1,2m$. Qual è l'accelerazione centripeta alla quale è sottoposta la pallina un istante prima di lasciare la semicirconferenza nel punto D ?



Svolgimento:

Dati

Altezza dello scivolo: $h = 5m$

Lunghezza del tratto: $\overline{BC} = 10m$

Coefficiente di attrito dinamico nel tratto BC : $k_d = 0,2$

Diametro della semicirconferenza CD : $d = 1,2m$

Analisi e Metodo

Per determinare il bilancio energetico costruiamo una tabella le cui righe rappresentano i valori dell'energia presenti nel problema, mentre le colonne indicano gli "stati energetici" del corpo o del sistema meccanico, definiti tramite le posizioni assunte negli istanti considerati.

Nel nostro caso consideriamo i punti A, B, C, D come quattro particolari posizioni che definiscono altrettanti stati energetici.

A ogni stato energetico corrisponde una particolare forma e valore dell'energia meccanica. Va sottolineato che, nel caso di forze non conservative, come per esempio la forza di attrito presente nel tratto BC, non si può parlare di "stato energetico" perché l'energia dissipata dipende dal percorso effettuato. In questi casi si può calcolare solo il valore totale dell'energia persa nel tratto considerato.

	A	B	C	D
U	mgh	0	0	mgd
Ec	0	$1/2mv_B^2$	$1/2mv_C^2$	$1/2mv_D^2$
La	0	$0 \rightarrow k_d mgl$		0
U+Ec+La	mgh	$1/2mv_B^2$	$1/2mv_C^2 + k_d mgl$	$mgd + 1/2mv_D^2$

- a. Consideriamo il tratto $A \rightarrow B$: l'energia totale a disposizione in A (entrata) mgh è uguale all'energia spesa in B (uscita) $1/2mv_B^2$. Si può scrivere l'equazione: $mgh = \frac{1}{2}mv_B^2$.
- b. Consideriamo il tratto $B \rightarrow C$: l'energia totale a disposizione in B (entrata) $1/2mv_B^2$ è uguale all'energia spesa in C (uscita) $1/2mv_C^2 + k_d mgl$. Si può scrivere l'equazione:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_C^2 + k_d mgl$$

- c. Consideriamo il tratto $C \rightarrow D$: l'energia totale a disposizione in C (entrata) $1/2mv_C^2$; infatti non si può considerare l'energia dissipata dalla forza di attrito, non più recuperabile perché spesa sotto forma di calore; l'energia spesa in D (uscita) è uguale a $1/2mv_D^2 + mgd$. Possiamo quindi scrivere l'equazione: $\frac{1}{2}mv_C^2 = \frac{1}{2}mv_D^2 + mgd$. In definitiva si ha:

$$\begin{cases} mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 \\ \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_C^2 + k_d mgl \\ \frac{1}{2}mv_C^2 = \frac{1}{2}mv_D^2 + mgd \end{cases}$$

Soluzione algebrica e numerica

Si può ricavare ora l'accelerazione centripeta richiesta, ricordando che $a_c = \frac{v_D^2}{r}$. Ricavando v_D^2 dall'ultima equazione si ottiene: $v_D^2 = v_C^2 - 2gd$. D'altro canto, dalla seconda equazione si ricava: $v_C^2 = v_B^2 - 2k_d gl$ e dalla prima: $v_B^2 = 2gh$. In definitiva si ottiene:

$$a_c = \frac{v_D^2}{r} = \frac{2gh - 2k_d gl - 2gd}{\frac{d}{2}} = \frac{4g(h - k_d l - d)}{d} = \frac{4 \cdot 9,8 \cdot (5 - 0,2 \cdot 10 - 1,2)}{1,2} \cong 59 \frac{m}{s^2}.$$

- Un proiettile di massa $m = 1,5 \text{ kg}$ viene lanciato dalla superficie della Terra con velocità iniziale $v_0 = 60 \text{ m/s}$ inclinata di 45° rispetto all'orizzontale. Trascurando gli attriti, calcola il valore del

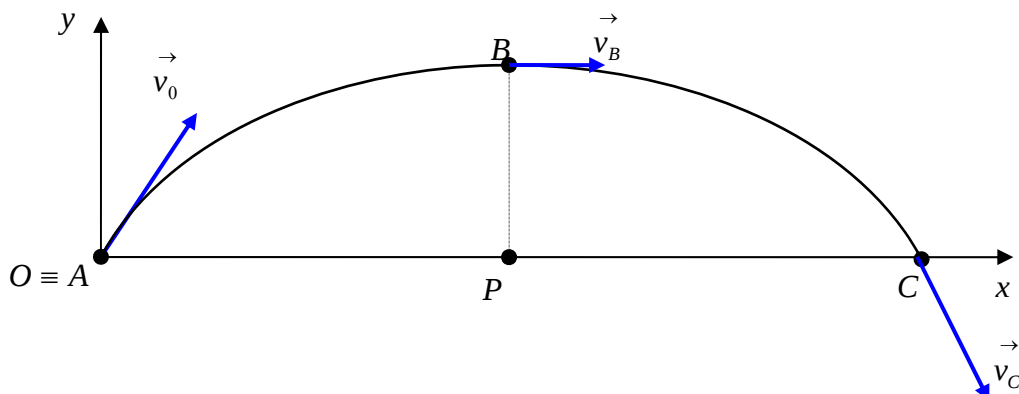
momento angolare del proiettile rispetto al punto P del terreno, corrispondente al valore massimo dell'altezza raggiunta dal proiettile nei seguenti casi:

- nel momento del lancio (punto A);
- nel punto di massima altezza (punto B);
- nel punto in cui tocca terra (punto C).

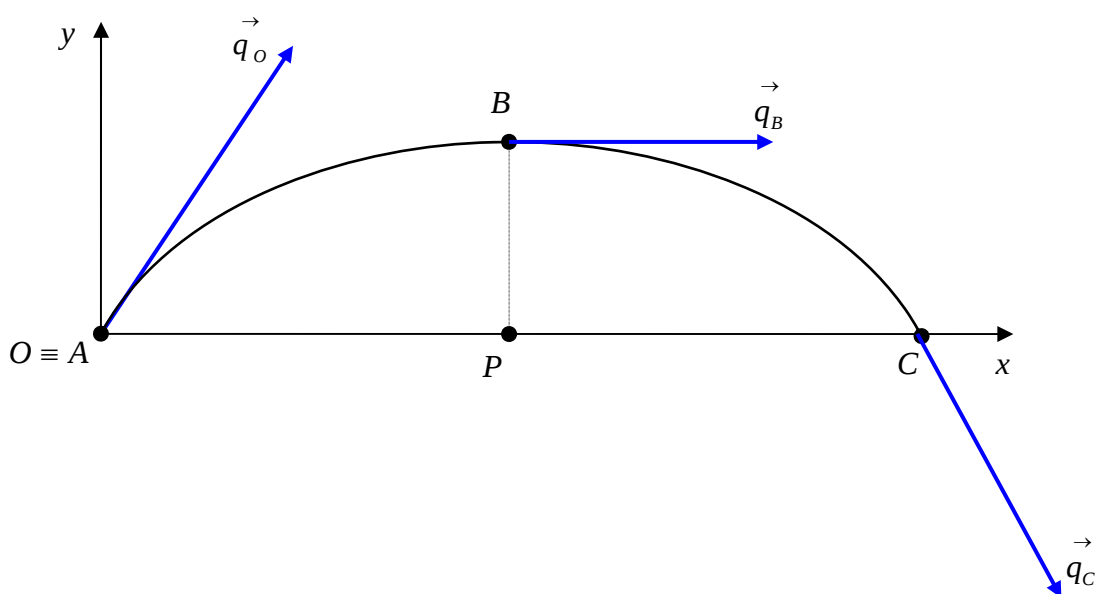
Verificare se si conserva il momento angolare.

Svolgimento:

Questo è il grafico della situazione:



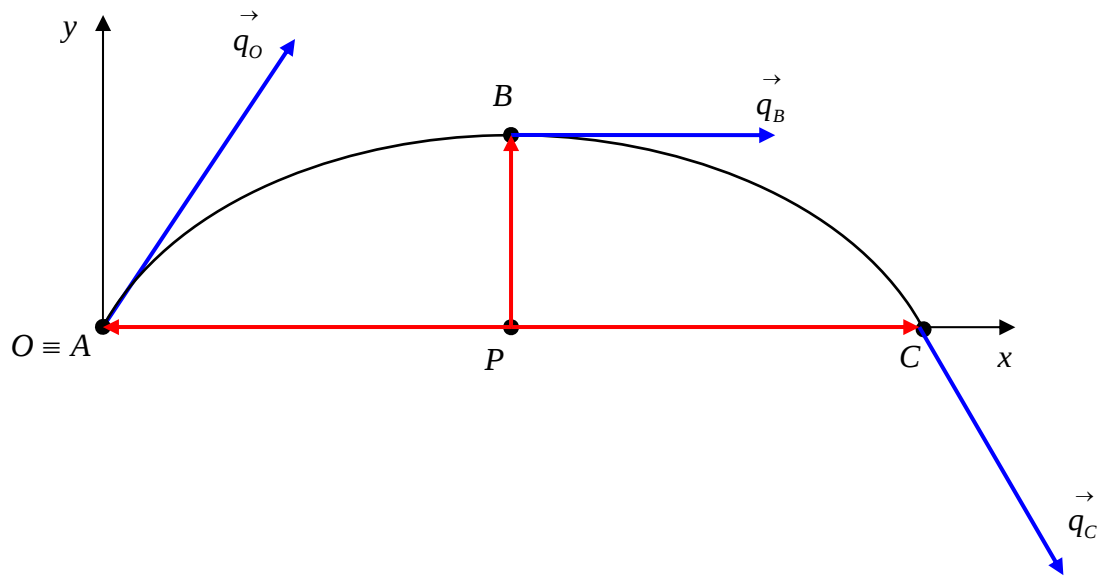
Evidentemente i moduli di $\vec{v}_0$ e $\vec{v}_C$ sono uguali. Nel grafico seguente riportiamo i vettori quantità di moto:



Bisogna calcolare i momenti di $\vec{q}_0$, $\vec{q}_B$ e $\vec{q}_C$ rispetto al punto P .

Indichiamo con $\vec{L}_O$, $\vec{L}_B$ e $\vec{L}_C$ rispettivamente i momenti di $\vec{q}_0$, $\vec{q}_B$ e $\vec{q}_C$ rispetto al punto P .

Nel seguente grafico abbiamo disegnato i vettori $\vec{PA}$, $\vec{PB}$ e $\vec{PC}$.



Dunque abbiamo:

$$\vec{L}_O = \vec{PA} \wedge \vec{q}_0; \quad \vec{L}_B = \vec{PB} \wedge \vec{q}_B; \quad \vec{L}_C = \vec{PC} \wedge \vec{q}_C.$$

Evidentemente il momento angolare non si conserva.

CAPITOLO 2.3

TERMODINAMICA

Riteniamo noti i concetti fondamentali di: lavoro di una forza costante e di una forza variabile, pressione, trasformazioni reversibili ed irreversibili, ancora, riteniamo note: le equazione fondamentale della calorimetria, il principio zero della termodinamica, le principali trasformazioni termodinamiche e le relative equazioni (trasformazione isoterma, isobara, isocora, adiabatica) e le loro rappresentazioni grafiche, le trasformazioni cicliche e il concetto di temperatura assoluta.

Si inizia precisando il concetto di **sistema termodinamico**, che è un qualsiasi oggetto esistente in natura che può scambiare materia ed energia, e portando esempi tratti da diversi ambiti: un bicchiere pieno di un liquido, una cellula, quindi, si chiarisce che ciò che non appartiene al sistema costituisce il suo esterno. Si precisa che nella termodinamica classica si considerano i sistemi nella loro globalità cioè non si studiano le particelle singolarmente e ciò d'altra parte non è possibile. Esiste comunque una branca della fisica che esamina il comportamento del sistema dal punto di vista statistico, detta meccanica statistica. Si classificano i sistemi termodinamici in aperti, chiusi, isolati: un sistema è **aperto** se scambia con l'ambiente esterno materia ed energia, **chiuso** se scambia energia ma non materia, **isolato** se non scambia né materia né energia. Un bicchiere colmo di acqua lasciato all'aperto al sole si riscalda (ovvero assorbe energia) e vaporizza (scambia materia), quindi è un sistema aperto; se lo stesso bicchiere viene ben tappato, continua a scambiare energia ma non materia ed il sistema è chiuso; se l'acqua viene messa in un termos ben funzionante allora si può considerare isolato; occorre precisare che nella realtà non esistono sistemi veramente isolati e che pertanto il concetto di sistema isolato è un modello. Se si vuole descrivere un sistema termodinamico occorre scegliere delle variabili e nella termodinamica classica si considerano la **pressione**, il **volume** e la **temperatura**; se cambia almeno una delle tre variabili **si dice che il sistema ha subito una trasformazione**; per ricavare le principali leggi che regolano i processi termodinamici senza ledere la loro validità, si ricorre al modello di **gas perfetto**; sostanzialmente in tale modello si verificano le seguenti condizioni:

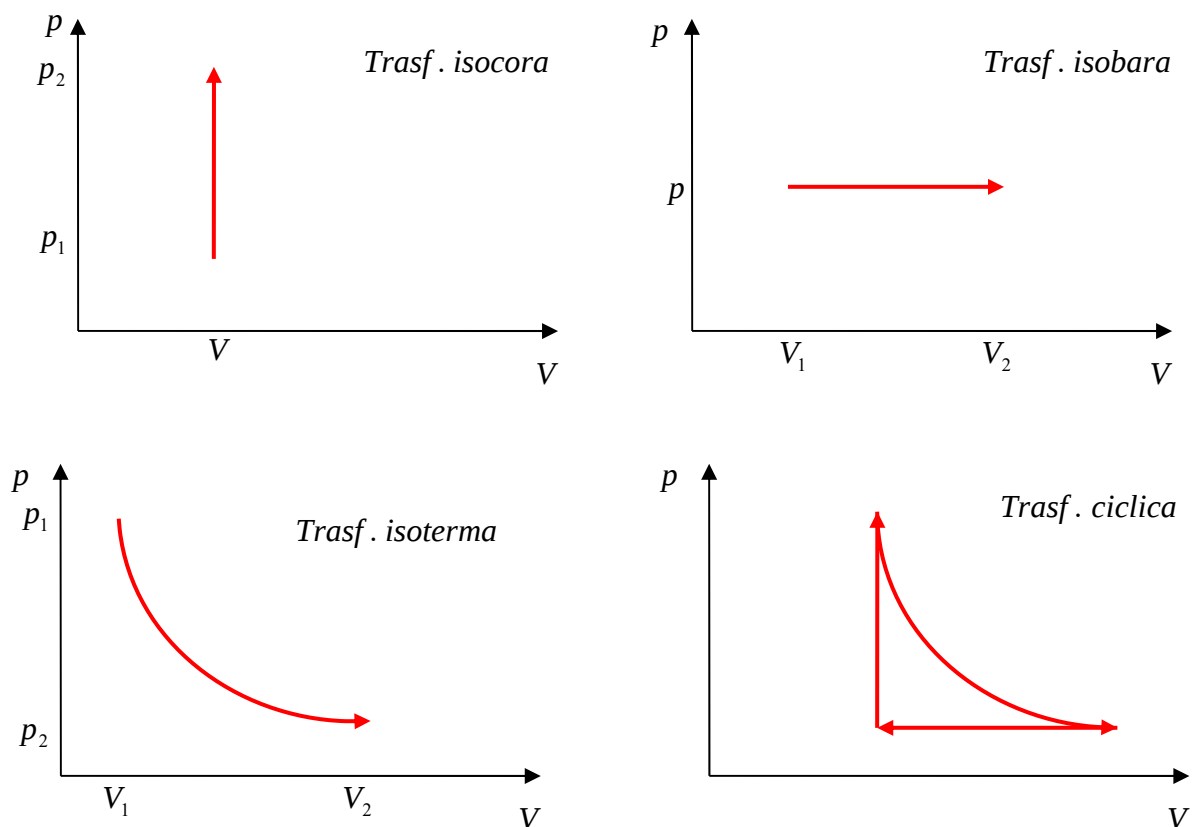
- il gas si pensa costituito da particelle puntiformi;
- tali particelle sono così lontane che può essere trascurata l'energia potenziale dovuta alla mutua attrazione;
- il moto delle particelle è rettilineo uniforme;
- la probabilità che due particelle si urtino è molto piccola e gli urti avvengono essenzialmente con le pareti del recipiente in cui il gas è contenuto;
- gli urti sono perfettamente elastici, quindi si conserva la quantità di moto e l'energia meccanica.

Sotto queste ipotesi vale la legge universale dei gas ideali di Clapeyron: $pV = nRT$; essendo p la pressione, V il volume, T la temperatura assoluta, n il numero di moli del gas e R la costante universale dei gas.

Nella realtà ci si può avvicinare al modello di gas ideale utilizzando gas sempre più rarefatti. Si discute a livello intuitivo il concetto fondamentale di **energia interna** di un corpo, cioè della somma di tutte le energie che competono le particelle del gas, quindi ci soffermeremo sull'energia interna dei gas perfetti pervenendo alla conclusione che nei gas perfetti l'energia interna è solo cinetica. D'altra parte, della teoria cinetico- molecola si ha la relazione $E = \frac{3}{2}kT$. Ancora, con

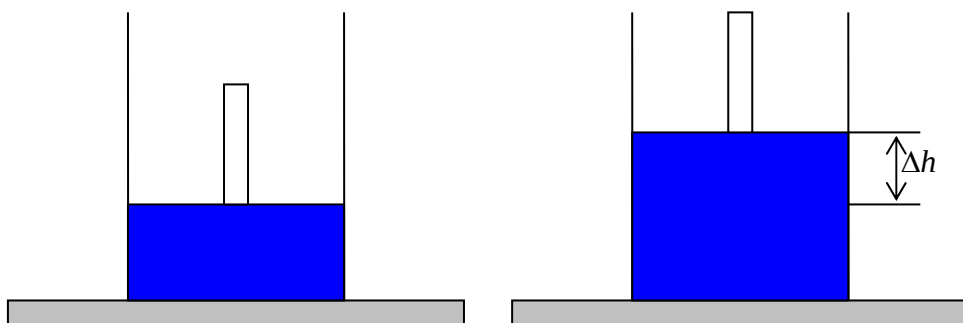
l'esperimento di Joule sull'espansione libera di un gas sempre più rarefatto, si potrà arrivare alla stessa conclusione.

I grafici seguenti illustrano i processi nel diagramma di Clapeyron:



In termodinamica conviene introdurre il lavoro nel caso di un processo isobarico perché la forza è costante essendo costante la pressione p , ricorrendo al modello di gas perfetto contenuto in un contenitore cilindrico in cui può scorrere senza attrito uno stantuffo di superficie A , si ha:

$$L = p\Delta V.$$

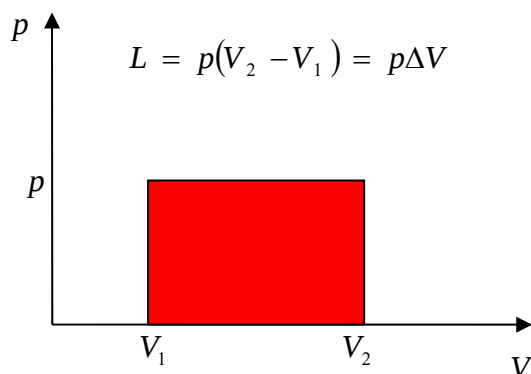


Essendo ΔV la variazione di volume.

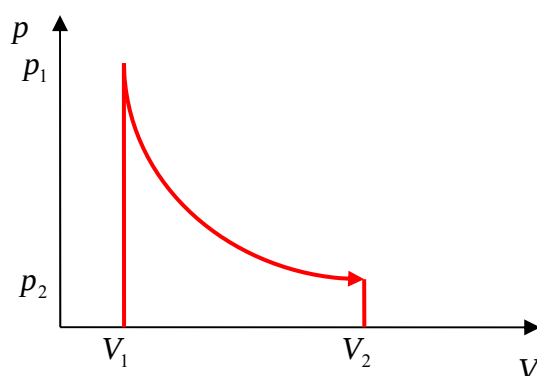
Nel caso in cui la pressione non è costante, la relazione scritta non si può più usare, in tal caso vale la:

$$L = \int_{V_1}^{V_2} p dV.$$

A livello didattico, almeno fino a quando non si conosce il concetto di integrale definito, si può procedere per analogia, cioè, così come il lavoro nel processo isobarico si può interpretare come l'area di un rettangolo:



Allo stesso modo il lavoro nel caso di un processo qualsiasi può essere interpretato come l'area della regione mistilinea data dalla curva che esprime la pressione in funzione del volume, l'asse dei volumi e le rette $p = p_1$ e $p = p_2$.



Ancora, nel caso di una trasformazione isoterma si ha:

$$L = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1};$$

riassumendo:

$$L = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

❖ Il secondo principio della termodinamica

Il primo principio della termodinamica, sostanzialmente esprime la conservazione dell'energia, ma nulla ci dice sulla possibilità che certi processi possano o non realizzarsi. In natura, mentre alcune trasformazioni avvengono spontaneamente, altre perché si realizzino occorre compiere un lavoro. Ad esempio quando un corpo è messo a contatto con un altro a temperatura minore, il corpo più freddo si riscalda e quello più caldo si raffredda fin quando non si raggiunge l'equilibrio termico, il processo avviene spontaneamente, il contrario no. Naturalmente, questo non significa che un corpo non possa cedere calore ad un altro a temperatura maggiore, ma afferma solo che tale processo deve avvenire fornendo energia meccanica dall'esterno. Lo stesso discorso vale quando un gas racchiuso in una bombola viene liberato aprendo il rubinetto, se l'ambiente esterno è meno denso del gas, questo esce liberamente e spontaneamente, mentre per ripristinare lo stato iniziale occorre spendere energia.

Il secondo principio permette di stabilire il verso dei processi reali, dal punto di vista storico il problema viene affrontato dagli ingegneri dell'ottocento nel calcolo del rendimento delle macchine termiche a vapore.

Joule e Kelvin si rendevano conto che una macchina termica non può funzionare con una sola sorgente termodinamica, perché non è possibile trasformare energia termica prelevata da un'unica sorgente integralmente in lavoro meccanico. L'esperienza evidenziava che ogni macchina termica non poteva funzionare se non operava con due sorgenti a diversa temperatura, la caldaia e il refrigerante.

Una macchina termica pertanto opera ciclicamente, preleva una certa quantità di energia termica Q_2 dalla sorgente a temperatura maggiore T_2 , una parte Q_1 , viene restituita al refrigerante cioè alla sorgente a temperatura minore T_1 , mentre la differenza $Q_2 - Q_1$, viene convertita in energia meccanica, cioè si ha: $L = Q_2 - Q_1$.

Il rendimento r della macchina è dato dal rapporto dell'energia in uscita, ovvero il lavoro meccanico prodotto e quella in entrata cioè il calore assorbito: $r = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2}$ ossia: $r = \frac{L}{Q_2}$.

Si sceglie per convenzione di assumere positivo il calore assorbito e negativo quello ceduto così pure, si sceglie positivo il lavoro se è fatto dal sistema sull'ambiente, negativo nel caso contrario.

Se invece si vuole sottrarre calore da un corpo e cederlo ad una sorgente a temperatura maggiore, in tal caso la macchina funziona come un frigorifero, si deve fornire lavoro dall'esterno in modo che alla sorgente calda arrivi l'energia termica da sottrarre all'oggetto e l'energia meccanica fornita dall'esterno.

La relazione $r = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2}$, può scriversi anche $r = 1 - \frac{Q_1}{Q_2}$ quindi si ha che il **rendimento di una**

macchina termica è sempre inferiore al 100%, il che altre parole per produrre energia meccanica, una macchina, spreca dell'energia termica, dunque è tanto più efficiente quanto meno energia termica spreca.

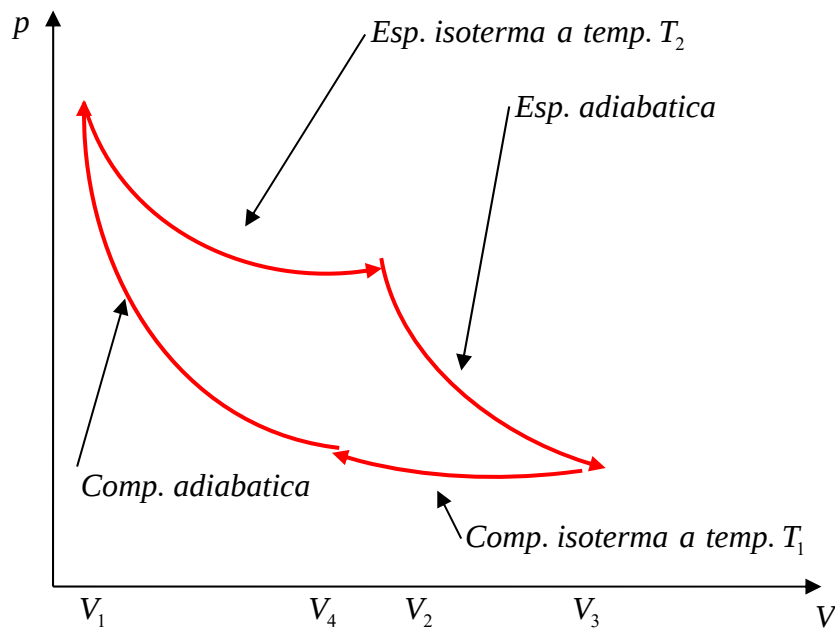
E' naturale allora chiedersi, quale sia la macchina termica, che a parità della temperature delle sorgenti, abbia il rendimento massimo, la risposta fu trovata da **Carnot**, che ideò un ciclo formato da due isoterme e da due adiabatiche il cui rendimento è lo stesso delle macchine termiche ideali

che operano tra le stesse temperature, mentre risulta sempre maggiore di ogni ciclo reale che lavori tra le stesse temperature.

Il fatto che può sembrare sorprendente è che il rendimento della macchina di Carnot e di tutte le macchine termiche ideali che operino tra le stesse temperature, risulta indipendente dal calore scambiato e dipende solo dalle temperature delle sorgenti secondo la relazione $r = 1 - \frac{T_1}{T_2}$.

Il ciclo di Carnot

Il ciclo di Carnot è costituito da un'espansione isoterma, seguita da un'altra espansione adiabatica, quindi una compressione isoterma seguita da un'altra compressione adiabatica.



Inizialmente il gas a temperatura T_1 e volume V_1 , viene posto su una sorgente termodinamica quindi a temperatura costante viene fatto espandere fino al volume V_2 , quindi si toglie il gas dalla sorgente e si continua a farlo espandere adiabaticamente fino al volume V_3 , durante questa operazione il gas si raffredda fino ad una temperatura $T_1 < T_2$, si pone il contenitore con il gas su un'altra sorgente a temperatura T_1 , si esegue una compressione mantenendo costante la temperatura fino al volume V_4 , infine si toglie il gas dalla sorgente e si continua la compressione fino a riportare il gas allo stato iniziale, infatti l'effetto dell'ultima compressione è quello di aumentare la temperatura.

Diamo ora l'enunciato di Kelvin del secondo principio della termodinamica:

E' impossibile realizzare una macchina termica il cui unico risultato sia quello di trasformare in lavoro il calore prelevato da un'unica sorgente.

L'altro enunciato classico del secondo principio è quello di Clausius, apparentemente diverso da quello di Kelvin, ma ad esso equivalente:

E' impossibile realizzare una trasformazione il cui unico risultato sia quello di trasferire calore da un corpo ad un altro a temperatura maggiore.

L'enunciato non dice che è impossibile trasferire calore da un corpo ad un altro a temperatura maggiore, afferma però che questo non è l'unico risultato, infatti le macchine frigorifere assorbono calore da un corpo e lo cedono alla sorgente a temperatura maggiore, però per arrivare all'obiettivo si deve compiere lavoro sulla macchina e pertanto alla sorgente a temperatura maggiore arriva sia il calore sottratto al corpo che si vuole raffreddare sia l'energia fornita dall'esterno.

Una macchina frigorifera allora funziona in modo esattamente inverso della macchina termica ed è tanto più efficiente quanto meno lavoro meccanico si deve effettuare su di essa, allora il coefficiente di prestazione di una macchina frigorifera è dato dal rapporto tra il calore sottratto al corpo e l'energia assorbita dall'esterno.

Questionario 2

1. Il vettore in fisica è:
 - a. Un ente matematico concreto dotato di modulo, direzione e verso;
 - b. un ente matematico astratto dotato di modulo, direzione e verso;
 - c. un mezzo di trasporto dotato di modulo, direzione e verso.

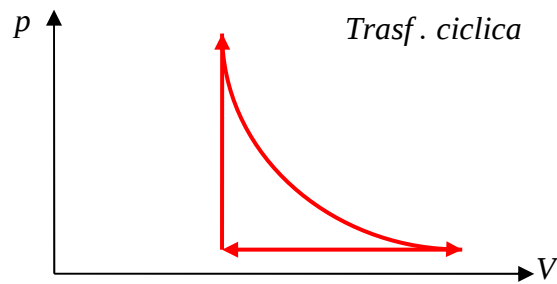
2. Dati due vettori di modulo rispettivamente 3 e 4, il vettore risultante avrà modulo:
 - a. Necessariamente 7 ;
 - b. necessariamente 5 ;
 - c. 5 se l'angolo formato dai due vettori è retto.

3. La formula $r = \sqrt{v^2 + w^2 + 2vw \cos \alpha}$ rappresenta:
 - a. Il teorema del coseno;
 - b. il teorema del seno;
 - c. il modulo del risultante di due vettori formanti un angolo di α° .

4. La funzione $x = t^2 + t + 3$, può rappresentare:
 - a. La legge oraria di un moto rettilineo uniforme, dove x è lo spazio misurato in metri e t il tempo misurato in secondi;
 - b. la legge oraria di un moto sicuramente non rettilineo uniforme, dove x è lo spazio misurato in metri e t il tempo misurato in secondi;
 - c. sia la legge oraria di un moto rettilineo uniforme sia la legge oraria di un moto non rettilineo uniforme, dove x è lo spazio misurato in metri e t il tempo misurato in secondi.

5. La formula $mgh + \frac{1}{2}mv^2 = \text{cost}$ esprime il fatto che:
 - a. La somma tra l'energia potenziale gravitazionale e l'energia cinetica è uguale al coseno di t , essendo t il tempo misurato in secondi ;
 - b. la somma tra l'energia potenziale elastica e l'energia cinetica rimane costante;
 - c. la somma tra l'energia potenziale gravitazione e l'energia cinetica rimane costante.

6. Dal grafico di figura, si può evincere che:



- a. Il lavoro della trasformazione è nullo;
 - b. il lavoro della trasformazione è l'area della parte di piano racchiusa dalle curve rappresentative delle varie trasformazioni, quindi è negativo;
 - c. il lavoro è sicuramente positivo.
7. La formula $L = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$ serve a:
- a. Calcolare il lavoro in una trasformazione isoterma;
 - b. calcolare il lavoro in una trasformazione isobara;
 - c. calcolare il lavoro indifferentemente in una trasformazione isoterma o isobara.
8. E' impossibile realizzare una macchina termica il cui unico risultato sia quello di trasformare in lavoro il calore prelevato da un'unica sorgente.
- a. La frase sopra riportata, esprime il secondo principio della termodinamica secondo Kelvin;
 - b. la frase sopra riportata, esprime il secondo principio della termodinamica secondo Clausius;
 - c. la frase sopra riportata esprime il secondo principio in funzione dei lavori di Kelvin e Clausius.
9. La formula $r = 1 - \frac{T_1}{T_2}$ esprime il rendimento di:
- a. Una macchina termica qualsiasi;
 - b. una macchina termica ideale;
 - c. sia di una macchina termica ideale sia di una macchina termica non ideale.
10. La formula $r = 1 - \frac{Q_1}{Q_2}$ esprime il rendimento di:
- a. Una macchina termica qualsiasi;
 - b. una macchina termica ideale;
 - c. sia di una macchina termica ideale sia di una macchina termica non ideale.

UNITA' DIDATTICA 3: TEMI SVOLTI DI MATEMATICA

CAPITOLO 3.1

CONCORSO ORDINARIO 1984

Prova scritta

Il candidato risolva o tratti, tra quelli appresso proposti, almeno due quesiti o argomenti, uno scelto nel campo delle scienze matematiche, l'altro nel campo delle scienze sperimentali:

1. Nel piano è fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale.

Studiare la parabola p del quarto ordine $y = x^4 - 4x^2 + 4x$. Verificare che l'unica affinità piana, non identica, che muta in sé la parabola p ha equazioni:

$$(A) \quad x = -X; \quad y = Y - 8X.$$

Studiare l'affinità (A) ed in particolare il comportamento delle rette unite rispetto alla parabola p .

2. Nel piano è fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy .

Si consideri la circonferenza C di centro $A(1,0)$ e raggio r . Detto M un punto della circonferenza siano P e Q rispettivamente il baricentro e l'ortocentro del triangolo OAM .

Determinare la circonferenza C' descritta dal punto P al variare di M sulla circonferenza C e trovare per quale valore di r la corda comune alle due circonferenze C e C' ha lunghezza massima.

Studiare il luogo descritto dal punto Q al variare di M sulla circonferenza C nel caso $r = 1$.

3. Riflessioni e commenti sul tema "Corrispondenze e analogie strutturali", che figura nei programmi di matematica della scuola media (D.M. 9/2/1979).
4. I composti del cloro.
5. Concetto di microclima, microclimi particolari, alterazioni positive o negative dei microclimi ad opera dell'uomo.
6. I pannelli solari e la funzione delle energie alternative nel quadro del fabbisogno energetico.
7. Rocce ignee.
8. La rilevanza dell'educazione alimentare nel piano dell'educazione alla salute.
9. Il codice genetico.
10. Associazioni vegetali (bosco, macchia, foresta ecc.).

Ci occuperemo in questo capitolo solo della risoluzione dei primi due temi di matematica, in quanto, riteniamo altamente improbabile, che il tema 3 possa essere oggetto di una nuova prova, mentre, i temi relativi al campo delle scienze sperimentali saranno trattati alcuni nell'unità 4 e altri nell'unità 2.

Risoluzione del tema n. 1

La parabola quartica

$$p: y = x^4 - 4x^2 + 4x,$$

definita e continua su tutto l'asse reale, passa per l'origine O del sistema di riferimento cartesiano Oxy ed ha ivi tangenti di equazione $t: y = 4x$. Risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = x^4 - 4x^2 + 4x; \\ y = 4x \end{cases}$$

si trova che t interseca p in altri due punti: $A(-2, -8)$; $B(2, 8)$. La curva p presenta ovviamente due rami parabolici, uno destro e uno sinistro, entrambi nella direzione dell'asse y e tali che, per $x \rightarrow \pm\infty$, $y \rightarrow +\infty$.

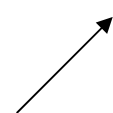
Ricerchiamo ora, i punti a tangente orizzontale, cioè quelli tali che $y' = 0$:

$$y' = 4x^3 - 8x + 4 = 4(x^3 - 2x + 1) = 4(x-1)(x^2 + x - 1);$$

studiamo quindi i segni di $x-1$ e $x^2 + x - 1$.

$x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$; $x^2 + x - 1 > 0$ risolvendo: $x^2 + x - 1 = 0$ si ha: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ dunque:

$x < \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \vee x > \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ quindi abbiamo il seguente schema:

	$\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$	1	
$x-1$	-	-	-	+
$x^2 + x - 1$	+	-	+	+
y'	-	+	-	+
y				

Pertanto abbiamo che p decresce in $\left] -\infty, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right[\cup \left] \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, 1 \right[$ mentre cresce in $\left] \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right[\cup] 1, +\infty[$. Dunque, essa ha un massimo relativo per $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ e due

Minimi relativi, uno per $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ e uno per $x = 1$. Ancora, essendo $y\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{-9+5\sqrt{5}}{2}$;
 $y\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{-9-5\sqrt{5}}{2}$ e $y(1) = 1$ si ha che i due minimi ed il massimo hanno coordinate:

$$C(1,1); \quad D\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-9-5\sqrt{5}}{2}\right); \quad E\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-9+5\sqrt{5}}{2}\right);$$

se vogliamo, ai fini di disegnare il grafico di p si ha:

$$x_D \cong -1,6; \quad y_D \cong -10,1; \quad x_E \cong 0,6; \quad y_E \cong 1,1.$$

Ricerchiamo ora eventuali punti di flesso calando e studiando il segno della derivata seconda.

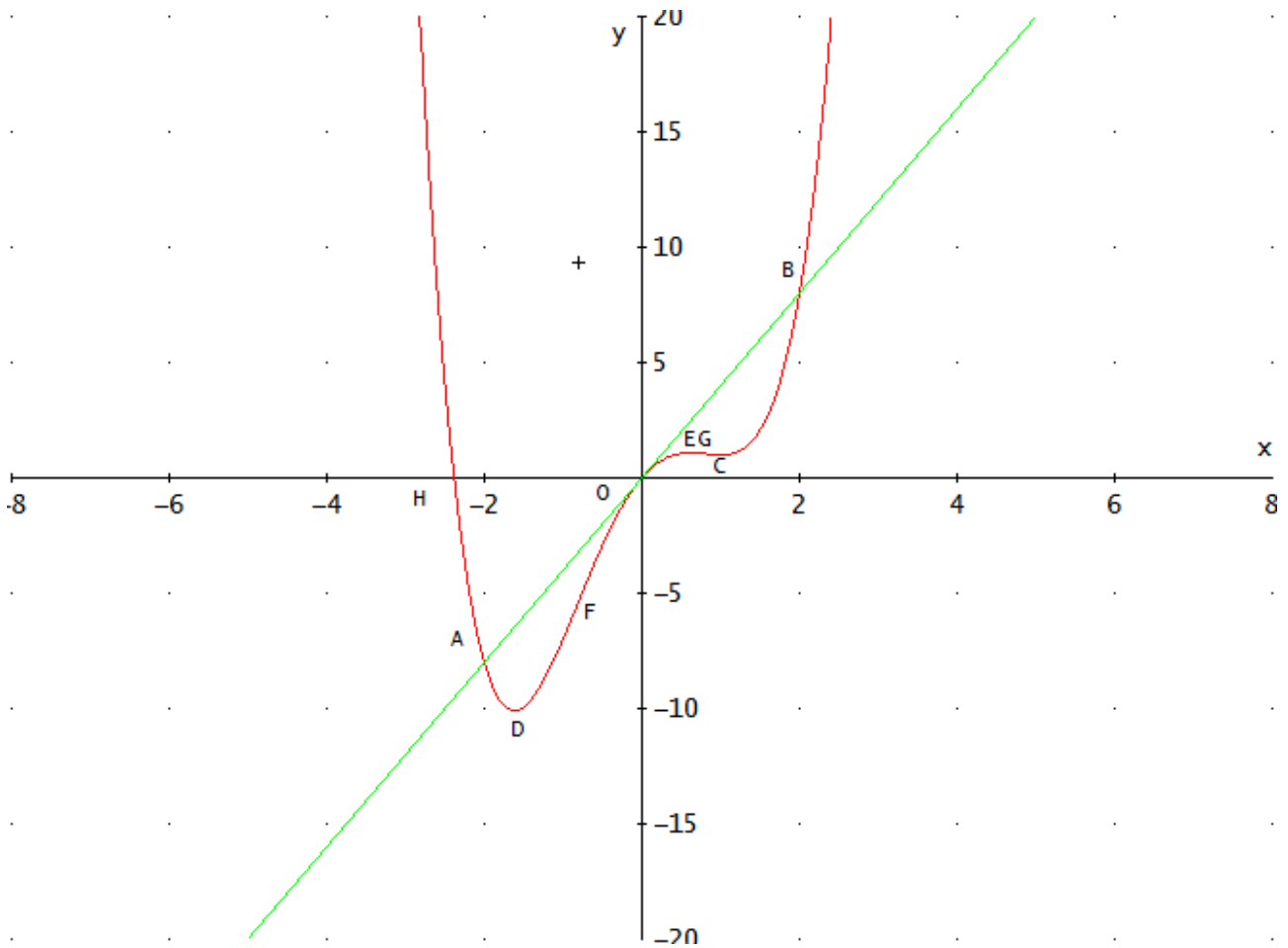
$y'' = 12x^2 - 8 = 4(3x^2 - 2)$; quindi risolviamo la: $y'' > 0$ ossia: $3x^2 - 2 > 0$, risolvendo la:
 $3x^2 - 2 = 0$ troviamo: $x = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$ dunque abbiamo il seguente schema:

	$-\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	
y''	+	-	+
y	U	∩	U

Cioè, concava verso l'alto negli intervalli $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right[$ e $\left]\frac{\sqrt{6}}{3}, +\infty\right[$; concava verso il basso
 nell'intervallo $\left]-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right[$ quindi la parabola presenta due flessi, uno per $x = -\frac{\sqrt{6}}{3}$ ed uno
 per $x = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Analogamente a come abbiamo fatto per i punti di massimo e minimo relativi si trova:

$$F\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{20-12\sqrt{6}}{9}\right); G\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{20+12\sqrt{6}}{9}\right); \text{ ossia: } x_F \cong -0,8; y_F \cong -5,5; x_G \cong 0,8; y_G \cong 1,04.$$

Nella pagina seguente abbiamo disegnato un andamento approssimato del grafico di p .



Da questa figura si vede che p interseca l'asse delle ascisse oltre che nell'origine, in un ulteriore punto H , di cui si può trovare l'ascissa che sarà irrazionale, un suo valore approssimato è: $x_H \cong -2,4$.

Per risolvere la seconda parte del tema, cominciamo col considerare le equazioni di una generica affinità:

$$\begin{cases} x = aX + bY + c \\ y = a'X + b'Y + c' \end{cases}; \quad \text{con } ab' - a'b \neq 0.$$

Sostituendo nell'equazione di p forniscono la seguente equazione trasformata:

$$a'X + b'Y + c' = (aX + bY + c)^4 - 4(aX + bY + c)^2 + 4(aX + bY + c);$$

dopo facili ma noiosi calcoli si ha:

$$a^4X^4 + 4a^3bX^3Y + 6a^2b^2X^2Y^2 + 4ab^3XY^3 + b^4Y^4 + 4a^3cX^3 + 12a^2bcX^2Y + 12ab^2cXY^2 + 4b^3cY^3 + \\ + 2a^2(3c^2 - 2)X^2 + 4ab(3c^2 - 2)XY + 2b^2(3c^2 - 2)Y^2 + (4ac^3 - 8ac + 4a - a')X + (4bc^3 - 8bc + 4b - b')Y + \\ + (c^4 - 4c^2 + 4c - c') = 0.$$

Affinché questa ultima eq. diventi: $X^4 - 4X^2 + 4X - Y = 0$ per il principio di identità dei polinomi, bisogna imporre le seguenti condizioni:

$$a^4 = 1; a^3b = 0; a^2b^2 = 0; ab^3 = 0; b^4 = 0; a^3c = 0; a^2bc = 0; ab^2c = 0; b^3c = 0; 2a^2(3c^2 - 2) = -4;$$

$$ab(3c^2 - 2) = 0; b^2(3c^2 - 2) = 0; (4ac^3 - 8ac + 4a - a') = 4; (4bc^3 - 8bc + 4b - b') = -1; c^4 - 4c^2 + 4c - c' = 0.$$

Risolvendo, si ricavano due soluzioni:

$$a = b' = 1; b = c = a' = c' = 0; \text{ oppure } a = -1; a' = -8; b' = 1; b = c = c' = 0.$$

La prima corrisponde all'affinità identica $x = X; y = Y$ e la seconda all'affinità:

$$(A) \quad x = -X; y = -8X + Y.$$

Passiamo ora allo studio dell'affinità (A).

Come tutte le affinità, anche per (A) si ha che: tre o più punti allineati si trasformano in tre o più punti allineati; quindi le rette vengono trasformate in rette e i segmenti in segmenti; rette parallele sono trasformate in rette parallele. Da ciò segue che i parallelogrammi vengono trasformati in parallelogrammi; se due rette si incontrano in un punto P , le rette loro immagini si incontrano in un punto P' , immagine di P ; un'ellisse è trasformata in un'ellisse, una parabola in una parabola, un'iperbole in un'iperbole; se la figura piana A ha per immagine A' e B ha per immagine B' , il rapporto tra le aree è costante: $S_A : S_B = S_{A'} : S_{B'}$ e si ha: $\frac{S_{A'}}{S_A} = |ab' - a'b| = |-1 \cdot 1 - (-8) \cdot 0| = -1$.

Si tratta, quindi, di un'affinità cossi detta equivalente. Essa, cioè trasforma porzioni del piano di data area in porzioni della stessa area; essendo il rapporto tra queste aree negativo, mentre un punto della frontiera della prima porzione descrive in un determinato verso la frontiera medesima, il punto trasformato di esso, descrive nel verso opposto la frontiera della seconda porzione.

Cerchiamo eventuali punti uniti, basta porre nelle eq. di (A) $x = X; y = Y$; si trova:

$$x = 0, \quad y \text{ qualunque};$$

se ne deduce che l'asse y è retta unita luogo di punti uniti. Per stabilire se l'affinità presenta altre rette unite, bisogna considerare la generica retta di equazione $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ quindi la sua trasformata secondo (A), che è: $-(\alpha + 8\beta)X + \beta Y + \gamma = 0$. Affinché le due rette coincidano deve risultare $-(\alpha + 8\beta) = \alpha$, ossia $\alpha = -4\beta$. Dunque le rette unite di (A) hanno la seguente equazione:

$$-4\beta x + \beta y + \gamma = 0; \quad \text{con } (\beta, \gamma) \neq (0, 0).$$

Per $\beta = 0$, si ottiene la retta all'infinito del piano, che quindi rappresenta una retta unità per l'affinità, considerata immersa nel piano proiettivo. Per $\beta \neq 0$, si trova che le rette unite di (A) sono quelle che hanno equazione:

$$y = 4x + h$$

al variare di h nell'insieme dei numeri reali.

Comportamento delle rette unite rispetto alla parabola p .

Incominciamo a ricercare i punti di p nei quali la retta tangente ha coefficiente angolare 4. Il coefficiente angolare della tangente nel generico punto di p è $y' = 4x^3 - 8x + 4$, deve essere quindi:

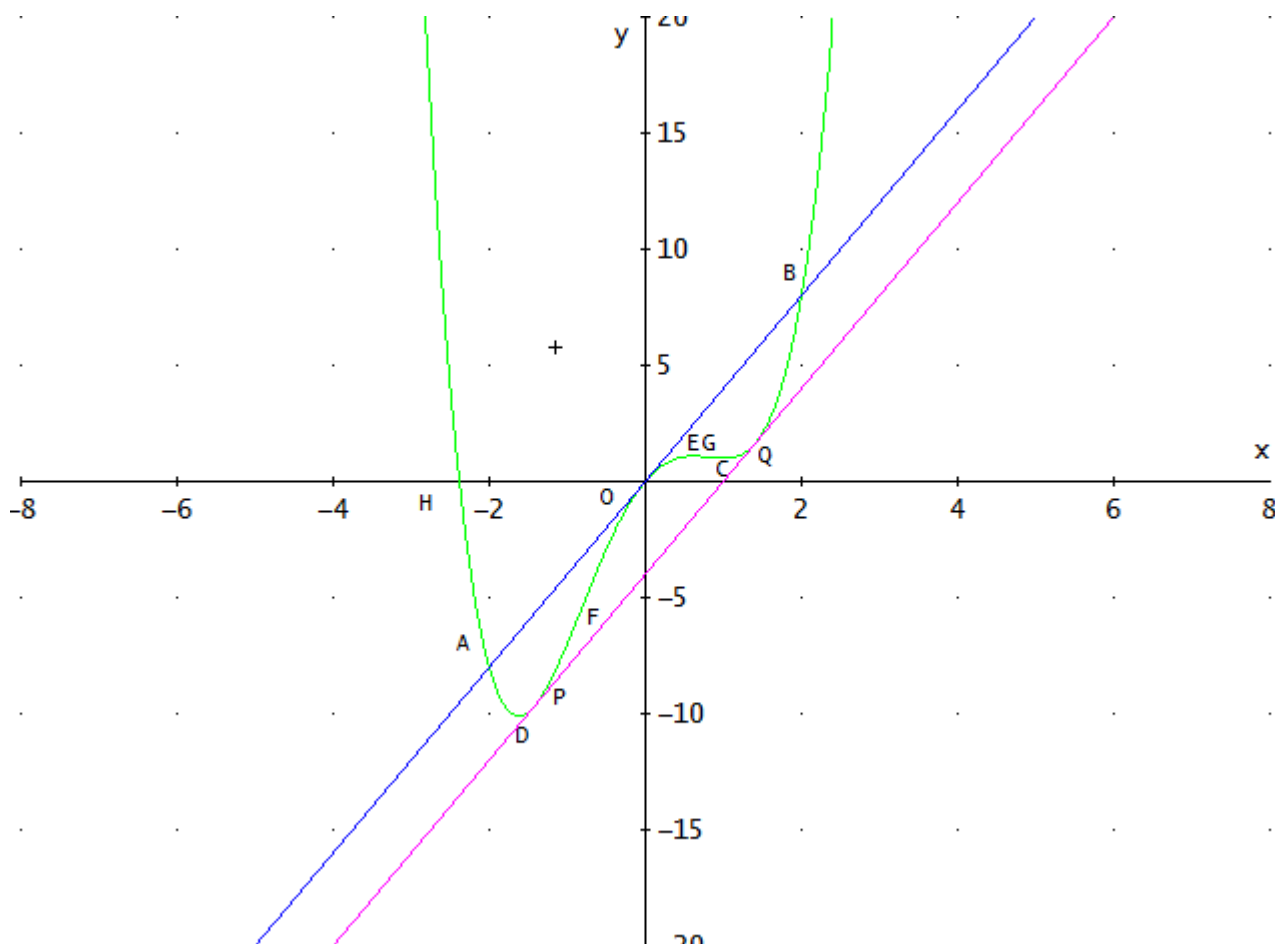
$$4x^3 - 8x + 4 = 4;$$

risolvendo si ha:

$$x = 0, \quad x = -\sqrt{2}, \quad x = \sqrt{2}; \quad \text{ed essendo: } y(0) = 0, \quad y(-\sqrt{2}) = -4 - 4\sqrt{2}, \quad y(\sqrt{2}) = -4 + 4\sqrt{2};$$

dunque i punti cercati sono: $O(0,0)$; $P(-\sqrt{2}, -4 - 4\sqrt{2})$; $Q(\sqrt{2}, -4 + 4\sqrt{2})$.

Pertanto, si trovano le rette unite tangenti a p , sostituendo nella $y = 4x + h$ le coordinate di questi punti. Abbiamo dunque: $h = 0$, $h = -4$, $h = -4$. Pertanto, tra le rette unite di (A), due risultano tangenti alla parabola p ; la retta $y = 4x$, passante per O , e la retta $y = 4x - 4$, contenente i punti P e Q .



Osservando la figura si vede facilmente che, al variare di h , la retta $y = 4x + h$ interseca la parabola p : in 2 punti reali e distinti se $h > 0$; in 4 punti reali, 2 distinti e 2 coincidenti, se $h = 0$; in 4 punti reali, a 2 a 2 coincidenti, se $h = -4$; in nessun punto reale se in 4 punti reali, 2 distinti e 2 coincidenti, se $h < -4$.

Prima di risolvere il tema n. 2, riteniamo opportuno, fare una “panoramica” sulle trasformazioni geometriche, vista la frequenza con la quale essi si sono presentati nelle prove dei precedenti concorsi.

➤ Le trasformazioni geometriche

❖ Le equazioni di una trasformazione geometrica

Definizione

Trasformazione geometrica

Una trasformazione geometrica è una corrispondenza biunivoca che associa a ogni punto del piano uno e un solo punto del piano stesso.

In altri termini si ha una trasformazione geometrica quando viene data una regola mediante la quale ad ogni punto P di un piano viene associato un solo punto P' dello stesso piano.

Consideriamo il piano cartesiano e indichiamo con $P(x, y)$ un suo punto. Per indicare il punto corrispondente di P in una trasformazione geometrica g aggiungiamo un apice alla lettera che indica il punto e alle rispettive coordinate $P'(x', y')$ e diciamo che P' è il **trasformato** o **l'immagine** di P mediante g . Scriviamo $P' = g(P)$ od anche $P(x, y) \xrightarrow{g} P'(x', y')$ o semplicemente $P(x, y) \rightarrow P'(x', y')$.

Essendo g biunivoca, esiste sempre ed è unica la **trasformazione inversa** che indichiamo con g^{-1} che fa corrispondere ad ogni punto del piano P' il punto P ; diciamo in tal caso che P è **l'antitrasformato** o la **controimmagine** di P' rispetto a g e scriviamo $P = g^{-1}(P')$.

Esiste un legame tra le coordinate x e y di P e le coordinate x' e y' di P' , ebbene, questo legame consiste in due relazioni dette **equazioni della trasformazione**; così pure, esiste un legame tra le coordinate x' e y' di P' e le coordinate x e y di P , questo legame consiste sempre in due relazioni dette **equazioni della trasformazione inversa**.

Esempio 1 Consideriamo le equazioni: $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = x - y \end{cases}$. Assegnati due valori a x e a y , sono

univocamente determinati i valori di x' e y' . Per dimostrare che la corrispondenza è biunivoca, ricaviamo x e y in funzione di x' e y' risolvendo il sistema lineare in x e y . Essendo il discriminante del sistema $\Delta = 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -3 - 1 = -4 \neq 0$ il sistema ammette una ed una sola

soluzione e dopo facili calcoli si trova: $\begin{cases} x = \frac{1}{4}x' + \frac{1}{4}y' \\ y = \frac{1}{4}x' - \frac{3}{4}y' \end{cases}$.

. Dunque le: $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = x - y \end{cases}$ costituiscono le equazioni di una trasformazione g mentre le:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}x' + \frac{1}{4}y' \\ y = \frac{1}{4}x' - \frac{3}{4}y' \end{cases} \text{ costituiscono le equazioni della trasformazione inversa } g^{-1}.$$

Vediamo di chiarire meglio con un esempio numerico, se $P(1, 2)$ si ha: $x' = 3x + y = 3 \cdot 1 + 2 = 5$ e $y' = x - y = 1 - 2 = -1$ quindi $P'(5, -1)$; viceversa se $P'(5, -1)$ si ha: $x = \frac{1}{4}x' + \frac{1}{4}y' = \frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{1}{4} \cdot (-1) = \dots = 1$ e $y = \frac{1}{4}x' - \frac{3}{4}y' = \frac{1}{4} \cdot 5 - \frac{3}{4} \cdot (-1) = \dots = 2$.

Osservazione Consideriamo le equazioni $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 3x + y \end{cases}$, esse non costituiscono le equazioni di una trasformazione geometrica, infatti, se vogliamo ricavare x e y in funzione di x' e y' risolvendo il sistema lineare in x e y si ha: $\Delta = 3 \cdot 1 - 1 \cdot 3 = 0$, e quindi il sistema non è determinato.

❖ I punti e le figure

Definizione

Punto unito

In una trasformazione geometrica, un punto unito è un punto che ha se stesso per immagine.

Definizione

Figura unita

In una trasformazione geometrica, una figura unita è una figura che ha se stessa per immagine.

Osservazione Se in una figura ogni punto è unito, la figura si dice **figura di punti uniti** o **puntualmente unita**, altrimenti si dice **globalmente unita**

Definizione

Identità

La funzione che a ogni punto fa corrispondere se stesso si chiama **identità** e si indica con i .

Evidentemente nell'identità ogni punto è unito.

❖ La composizione di trasformazioni

Consideriamo due trasformazioni geometriche g_1 e g_2 , g_1 che trasformi il punto P in P' e g_2 il punto P' nel punto P'' . Per **trasformazione composta** di g_1 e g_2 intendiamo quella trasformazione geometrica che fa corrispondere al punto P direttamente il punto P'' e la indichiamo nel seguente modo: $g_2 \circ g_1$. Evidentemente si ha che: $P'' = (g_2 \circ g_1)(P)$, cioè abbiamo indicato con $(g_2 \circ g_1)(P)$ l'immagine di P mediante $(g_2 \circ g_1)$ così come indicavamo con $g(P)$ l'immagine di P mediante g .

Esempio

Consideriamo le trasformazioni di equazioni: $g_1 : \begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = x - y \end{cases}$ e $g_2 : \begin{cases} x'' = x' + y' \\ y'' = 2x' - y' \end{cases}$. Per ottenere il corrispondente di $P(1, 2)$ rispetto a $g_2 \circ g_1$, applichiamo prima g_1 e poi g_2 :

$$P(1, 2) \xrightarrow{g_1} P'(5, -1) \xrightarrow{g_2} P''(4, 11);$$

dunque possiamo anche scrivere:

$$(g_2 \circ g_1)(P) = g_2[g_1(P)] = g_2(P') = P'';$$

essendo: $g_1(P) = P'$ e $g_2(P') = P''$.

Evidentemente possiamo anche fare: $g_1 \circ g_2$ applicando prima g_2 e poi g_1 :

$$P(1, 2) \xrightarrow{g_2} P_1'(3, 0) \xrightarrow{g_1} P_1''(9, 3);$$

dunque possiamo anche scrivere:

$$(g_1 \circ g_2)(P) = g_1[g_2(P)] = g_1(P_1') = P_1'';$$

essendo: $g_2(P) = P_1'$ e $g_1(P_1') = P_1''$.

Osservazione Come abbiamo visto sopra $g_2 \circ g_1 \neq g_1 \circ g_2$ dunque in generale l'operazione di composizione di trasformazioni geometriche non gode della proprietà commutativa. Inoltre, per definizione di trasformazione inversa risulta: $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = i$.

Definizione

Trasformazione involutoria

Una trasformazione si dice involutoria se componendola con se stessa si ottiene l'identità.

Evidentemente, una trasformazione involutoria ha come inversa se stessa.

Esempio Come si vede facilmente la trasformazione di equazioni: $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$ è involutoria.

❖ Le affinità

Definizione

Affinità

Una trasformazione geometrica che ha equazioni del tipo: $\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$ con $\Delta = ab' - a'b \neq 0$, è una affinità.

Per ogni trasformazione geometrica è interessante cercare le proprietà **invarianti**, cioè quelle proprietà che si conservano nella trasformazione. Si può dimostrare per esempio che ogni affinità trasforma rette in rette, segmenti in segmenti, poligoni in poligoni con lo stesso numero di lati mentre la forma delle figure non è invece invariante, in altri termini il trasformato di un triangolo mediante una affinità, in generale non ha la stessa forma del triangolo di partenza così pure, in generale, la lunghezza di un segmento non è invariante.

Ancora, se $\Delta = ab' - a'b > 0$, l'affinità si dice **diretta** e conserva l'orientamento dei vertici di un poligono, mentre se $\Delta = ab' - a'b < 0$, l'affinità si dice **indiretta** e inverte l'orientamento.

Ci chiediamo ora, come sia possibile trovare gli eventuali punti uniti in una affinità. Evidentemente bisogna risolvere il sistema: $\begin{cases} x = ax + by + c \\ y = a'x + b'y + c' \end{cases}$ ossia: $\begin{cases} (a-1)x + by = -c \\ a'x + (b'-1)y = -c' \end{cases}$. Dunque, se questo sistema è determinato esiste uno ed un solo punto unito, se impossibile non esistono punti uniti e ancora, se è indeterminato cioè ha infinite soluzioni abbiamo una retta luogo dei punti uniti o un'identità. Da queste considerazioni segue che se in una affinità ci sono due punti uniti ce ne sono infiniti.

Cerchiamo ora, di trattare delle particolari affinità: le isometrie.

❖ Le isometrie

Definizione

Isometria

Una isometria è una affinità nella quale la distanza fra due qualunque punti del piano P e Q è uguale a quella fra le loro immagini P' e Q' , in simboli: $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$.

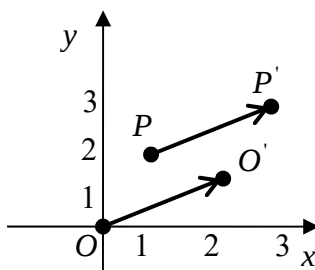
Una isometria trasforma una figura geometrica in una figura congruente pertanto, in una isometria si conserva anche l'estensione delle superfici.

Abbiamo quattro tipi di isometrie: traslazioni, simmetria assiale, simmetria centrale e la rotazione.

➤ LA TRASLAZIONE

❖ Le equazioni della traslazione

Vediamo come opera una traslazione. Consideriamo un generico punto P del piano e il vettore $\vec{v}$ applicato a P , dunque, facciamo coincidere P con il primo estremo del vettore e chiamiamo P' il punto del piano coincidente con il secondo estremo del vettore. La **traslazione** di vettore $\vec{v}$ è quella trasformazione geometrica che associa al punto P il punto P' . All'origine $O(0,0)$ la traslazione di vettore $\vec{v}(a,b)$ (il vettore $\vec{v}(a,b)$ è un vettore che ha il primo estremo nell'origine degli assi ed il secondo estremo nel punto di coordinate (a,b)) associa il punto $O'(a,b)$. Nella figura seguente abbiamo: $\vec{v}(2,1)$; $P(1,2)$; $P'(3,3)$; $O'(2,1)$.



Evidentemente le equazioni della traslazione del disegno sono $t: \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 1 \end{cases}$, in generale le equazioni di una traslazione di vettore $\vec{v}(a,b)$ sono $t: \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$.

❖ La traslazione è una isometria

Verifichiamo con un esempio che la traslazione conserva la distanza.

Esempio Consideriamo la traslazione vista prima cioè la traslazione di vettore $\vec{v}(2,1)$ calcolando la distanza tra i punti O e P quindi la distanza tra i loro trasformati O' e P' e verifichiamo che sono uguali.

$$\overline{OP} = \sqrt{(x_P)^2 + (y_P)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \dots = \sqrt{5};$$

$$\overline{O'P'} = \sqrt{(x_{P'} - x_{O'})^2 + (y_{P'} - y_{O'})^2} = \sqrt{(3-2)^2 + (3-1)^2} = \dots = \sqrt{5}.$$

Osservazione In una traslazione **non ci sono punti uniti**.

❖ La traslazione di una retta

Vediamo direttamente su un esempio come traslare una retta.

Esempio Consideriamo la retta r di equazione $y = 2x + 1$ e sempre la traslazione t di vettore $\vec{v}(2,1)$, procediamo nel seguente modo: scriviamo le equazioni della traslazione $t: \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 1 \end{cases}$

ricaviamo le equazioni della traslazione inversa: $t^{-1}: \begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' - 1 \end{cases}$, quindi sostituiamo nell'equazione

della retta r , in luogo di x , la quantità $x' - 2$ ed in luogo di y , la quantità $y' - 1$, in definitiva si ha: $y' - 1 = 2(x' - 2) + 1$ che dopo facili calcoli diventa: $y' = 2x' - 2$ dunque, l'equazione della retta r' è: $y' = 2x' - 2$.

Osservazione 1 Gli apici delle variabili x' e y' servono solo per distinguere la retta r' dalla retta di partenza. Una volta determinata r' , possiamo eliminare gli apici e scrivere:

$y = 2x + 1$ equazione della retta r ;

$y = 2x - 2$ equazione della retta r' .

Osserviamo ancora che le equazioni di r e r' hanno lo stesso coefficiente angolare e quindi la retta r e la sua immagine r' sono parallele. Questa è una proprietà generale:

le rette che si corrispondono in una traslazione sono parallele.

Osservazione 2 In una traslazione le uniche rette unite sono quelle parallele al vettore della traslazione.

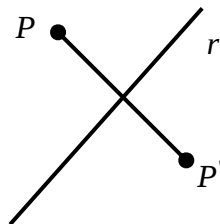
Osservazione 3 La composizione di due traslazioni di vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ è ancora una traslazione di vettore $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

➤ LA SIMMETRIA ASSIALE

Fissata nel piano una retta r , la **simmetria assiale** rispetto alla retta r è quella trasformazione geometrica che a ogni punto P del piano fa corrispondere il punto P' nel semipiano opposto rispetto a r e tale che r sia asse del segmento PP' , in altri termini:

- r passa per il punto medio di PP' ;
- PP' è perpendicolare a r .

La retta r è detta **asse di simmetria**.

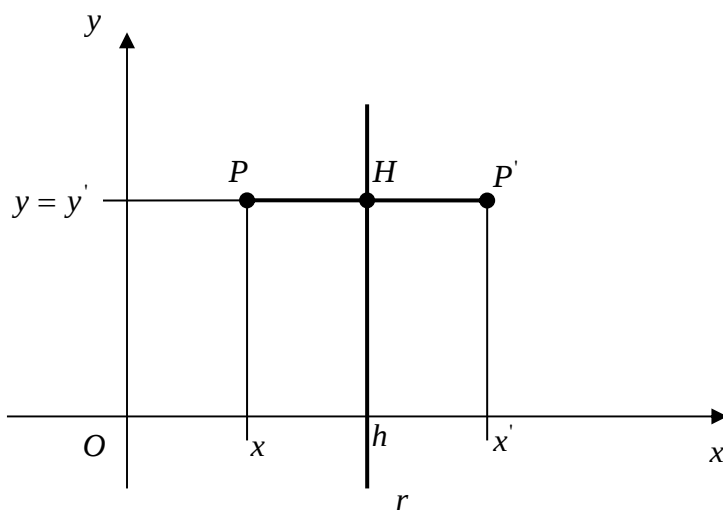


Indichiamo una simmetria di asse r con s_r .

Si può dimostrare che una simmetria assiale è una isometria ed è involutoria.

❖ La simmetria rispetto a un asse parallelo ad uno degli assi coordinati

Sia r la retta di equazione $x = h$ (una generica retta parallela all'asse y) e $P(x, y)$ il generico punto del piano, nel disegno seguente abbiamo costruito il punto P' simmetrico di P rispetto alla retta r .



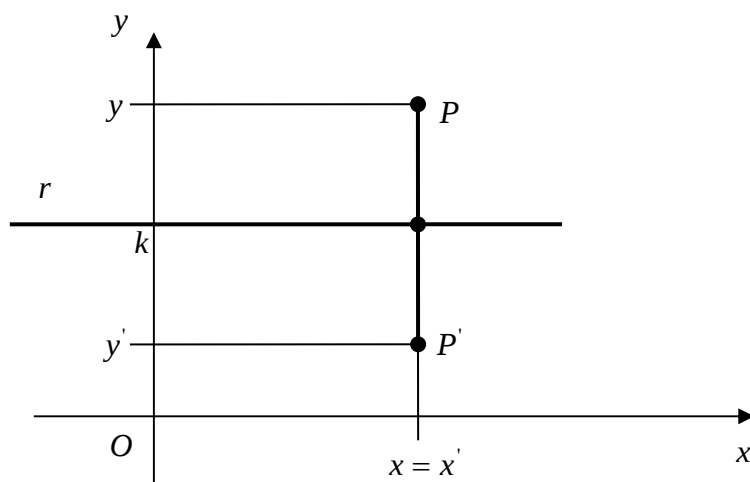
Dal disegno si vede immediatamente che $y' = y$, per quanto riguarda x' osserviamo che H è punto medio del segmento PP' dunque si ha: $h = \frac{x + x'}{2}$ che risolvendo rispetto ad x' da: $x' = 2h - x$.

Pertanto le **equazioni della simmetria rispetto all'asse r di eq. $x = h$** sono: $s_r : \begin{cases} x' = 2h - x \\ y' = y \end{cases}$.

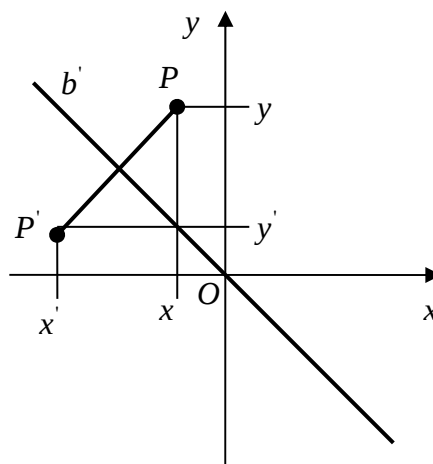
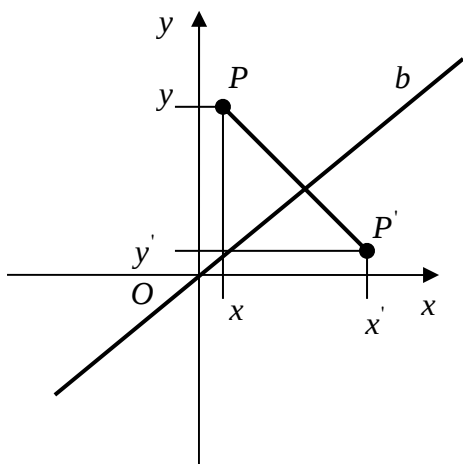
Se l'asse di simmetria è l'asse y la cui eq. è $x = 0$ avendo $h = 0$, le equazioni della simmetria

diventano: $s_y : \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$.

Mutatis mutandis otteniamo $s_r : \begin{cases} x' = x \\ y' = 2k - y \end{cases}$ e $s_x : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$. Vedasi anche la figura seguente.



❖ La simmetria rispetto alle bisettrici dei quadranti



Dal disegno emergono le:

- equazioni rispetto alla bisettrice b del primo e terzo quadrante $s_b : \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$.
- equazioni rispetto alla bisettrice b' del secondo e quarto quadrante $s_{b'} : \begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$.

❖ **La simmetria rispetto alla retta r di equazione $y = mx + q$**

Si può dimostrare che in questo caso le equazioni sono le seguenti:

$$s_r : \begin{cases} x' = \frac{1-m^2}{1+m^2}x + \frac{2m}{1+m^2}y - \frac{2mq}{1+m^2} \\ y' = \frac{2m}{1+m^2}x - \frac{1-m^2}{1+m^2}y + \frac{2q}{1+m^2} \end{cases}.$$

Si tratta di una affinità indiretta essendo: $\frac{1-m^2}{1+m^2} \cdot \left(-\frac{1-m^2}{1+m^2}\right) - \frac{2m}{1+m^2} \cdot \frac{2m}{1+m^2} = \dots = -1$.

❖ **I punti uniti**

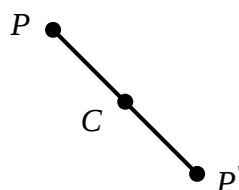
In una simmetria assiale i punti uniti sono i punti dell'asse di simmetria (l'asse di simmetria è una retta puntualmente unita).

❖ **Le rette unite di una simmetria assiale**

L'asse di simmetria come osservato sopra è una retta puntualmente unita, mentre ogni retta ortogonale all'asse di simmetria risulta globalmente unita.

➤ **LA SIMMETRIA CENTRALE**

Fissato nel piano un punto C , la **simmetria centrale** di centro C è la trasformazione geometrica che a ogni punto P del piano fa corrispondere il punto P' tale che C è il punto medio del segmento PP' .



Indichiamo una simmetria di centro C con s_C .

Evidentemente se $C(h, k)$ le equazioni della simmetria centrale di centro C sono: $s_C : \begin{cases} x' = 2h - x \\ y' = 2k - y \end{cases}$.

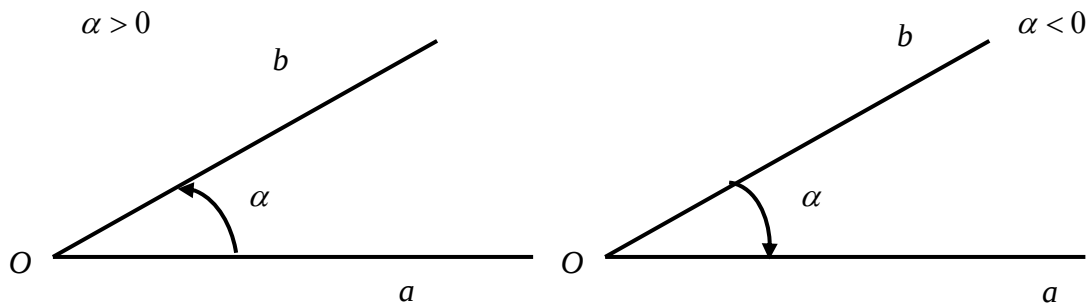
Si dimostra che una simmetria centrale è una isometria ed involutoria ed ancora che ogni retta passante per il centro di simmetria è una retta globalmente unita.

❖ **La simmetria centrale rispetto all'origine degli assi ha equazione: $s_O : \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$**

ed il centro di simmetria O è punto unito della trasformazione.

➤ LA ROTAZIONE

Dato un angolo $\widehat{aOb}$ (vedasi figura sotto) possiamo considerarlo **orientato** da a a b se procediamo in senso antiorario o da b ad a se procediamo in senso orario, noi per conveniamo di indicare con numeri positivi gli angoli del primo tipo e con numeri negativi quelli del secondo tipo.



Fissati nel piano un punto C e un angolo orientato α , la **rotazione di angolo α** è la trasformazione geometrica che a ogni punto P del piano fa corrispondere il punto P' tale che:

- $\overline{CP} = \overline{CP'}$;
- l'angolo $\widehat{PCP'}$ è congruente ad α e ugualmente orientato.

Il punto C è detto **centro di rotazione**.

Si può dimostrare che una rotazione è una isometria.

❖ La rotazione di centro l'origine degli assi

Indichiamo con $r_{O,\alpha}$ la rotazione di angolo α e centro l'origine degli assi, le equazioni di tale trasformazione sono:

$$r_{O,\alpha} : \begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

Osserviamo i seguenti fatti:

- se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, le eq. della rotazione diventano: $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$;
- se $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, le eq. della rotazione diventano: $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$;
- se $\alpha = 0$ o $\alpha = 2\pi$, la rotazione risulta essere una identità;
- se $\alpha = \pi$, la rotazione è la simmetria di centro O ;
- per ogni tipo di rotazione l'unico punto unito è il centro di rotazione;
- le simmetrie centrali possono essere viste come particolari rotazioni con $\alpha = \pi$ o $\alpha = -\pi$.

❖ La rotazione con centro C qualunque

Indichiamo con $r_{C,\alpha}$ la rotazione di angolo α e centro il punto $C(h,k)$, le equazioni di tale trasformazione sono:

$$r_{C,\alpha} : \begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha + a \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha + b \end{cases},$$

con $a = h - h \cos \alpha + k \sin \alpha$ e $b = k - h \sin \alpha + k \cos \alpha$.

Osserviamo i seguenti fatti:

- la trasformazione inversa di una rotazione di centro C e angolo α è ancora una rotazione di centro C e angolo $-\alpha$, cioè si ha: $r_{C,\alpha}^{-1} = r_{C,-\alpha}$;
- componendo due rotazioni con lo stesso centro C , di angoli α_1 e α_2 si ottiene ancora una rotazione di centro C e angolo $\alpha_1 + \alpha_2$
- componendo due rotazioni con centri C_1 e C_2 diversi, si può dimostrare che si ottiene una rotazione di diverso centro C oppure una traslazione.

➤ LE ISOMETRIE

❖ Proprietà delle isometrie

Riassumiamo alcune proprietà delle isometrie.

Se $\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$ sono le equazioni di una isometria, il **determinante**: $\Delta = ab' - a'b$ vale:

- 1 se l'isometria è una traslazione, una simmetria centrale o una rotazione;
- -1 se l'isometria è una simmetria assiale.

Per quanto riguarda i punti uniti si ha:

- nella traslazione non ci sono **punti uniti**;
- nella simmetria assiale i punti uniti sono quelli dell'asse;
- nella simmetria centrale e nella rotazione c'è un solo punto unito: il centro.

Per quanto riguarda le **rette globalmente unite**:

- nella traslazione sono quelle parallele al vettore della traslazione;
- nella simmetria assiale sono quelle perpendicolari all'asse;
- nella simmetria centrale sono quelle passanti per il centro;
- nella rotazione non ci sono rette unite.

❖ Condizioni affinché una affinità sia una isometria

Date le eq. di una affinità $\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$, con $\Delta = ab' - a'b \neq 0$ essa è una **isometria** se:

$$\begin{cases} a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 = 1 \\ ab + a'b' = 0 \end{cases}.$$

❖ La composizione di isometrie

La composizione di due simmetrie è ancora una isometria, inoltre, l'operazione di composizione genera nell'insieme delle isometrie una struttura di **gruppo** infatti si può dimostrare che valgono i seguenti fatti:

- l'operazione di composizione è associativa;
- esiste l'elemento neutro che è la trasformazione identità;
- per ogni isometria esiste l'inversa.

❖ La glissosimmetria

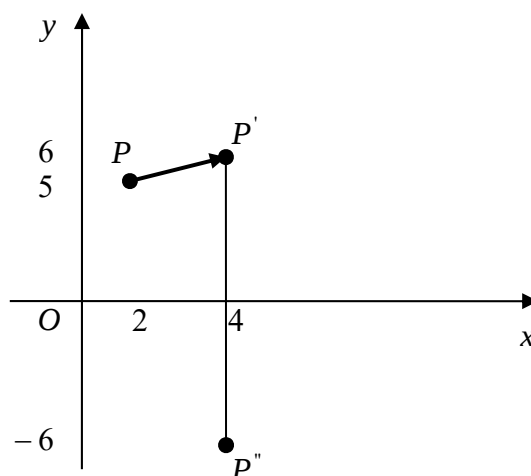
Chiamiamo **glissosimmetria** la composizione di una traslazione con una simmetria.

Esempio Ci proponiamo di trovare le equazioni della glissosimmetria ottenuta componendo la traslazione $t: \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 1 \end{cases}$ con la simmetria assiale $s_x: \begin{cases} x'' = x' \\ y'' = -y' \end{cases}$. Cioè vogliamo determinare le equazioni di $s_x \circ t$.

Evidentemente abbiamo: $s_x \circ t: \begin{cases} x'' = x + 2 \\ y'' = -y - 1 \end{cases}$.

Cerchiamo di trovare ora il corrispondente del punto $P(2, 5)$ mediante la glissosimmetria $s_x \circ t$.

Si ha: $x'' = x + 2 = 2 + 2 = 4$ e $y'' = -y - 1 = -5 - 1 = -6$. Dunque $P''(4, -6)$.



❖ La rappresentazione grafica delle coniche

Generalmente in geometria analitica si incominciano a rappresentare le coniche di equazione:

$ax^2 + by^2 + dx + ey + f = 0$, poi, le coniche di equazione $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$. Si può dimostrare che se nell'equazione di una conica è presente il termine in xy , mediante una opportuna rotazione si ottiene un'equazione senza tale termine, più semplice da studiare.

Valgono i seguenti fatti:

➤ L'OMOTETIA

❖ Prodotto di un vettore per un numero reale

Il prodotto di un numero per un vettore è un vettore.

$$\forall m \in \mathbb{R}, \forall \vec{v} \text{ si ha: } m \vec{v} = \begin{cases} \text{direzione quella di } \vec{v} \\ \text{modulo } |m|v \\ \text{segno di } v \text{ se } m > 0 \text{ altrimenti segno opposto a quello di } v \end{cases}.$$

Ancora se $\vec{v}(a, b)$ si ha: $m \vec{v} = (ma, mb)$.

❖ L'omotetia con centro nell'origine degli assi

Dato un numero reale $k \neq 0$, l'**omotetia di rapporto** k e centro O è quella trasformazione geometrica che a ogni punto P del piano fa corrispondere il punto P' tale che: $\vec{OP'} = k \cdot \vec{OP}$. Pertanto se P ha coordinate (x, y) , P' avrà coordinate (kx, ky) .

Il punto P' è detto **omotetico** di P e il numero k è detto **rapporto di omotetia**.

Indichiamo un'omotetia di rapporto k e centro O con: $\omega_{O,k}$. Pertanto le equazioni di una tale

omotetia sono: $\omega_{O,k} : \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}.$

Valgono i seguenti fatti:

- se due figure geometriche si corrispondono in un'omotetia il rapporto fra i lati corrispondenti è uguale al rapporto di omotetia k ed inoltre i lati corrispondenti sono paralleli;
- se $k = 1$ l'omotetia coincide con l'**identità** si ha infatti: $\omega_{O,1} : \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$, quindi tutti i punti del piano sono uniti;
- se $k = -1$ si ha: $\omega_{O,-1} : \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$ cioè, l'omotetia coincide con la simmetria di centro O , dunque O è l'unico punto unito ;
- se $k \neq 1$, il centro O è l'unico punto unito dell'omotetia;
- l'omotetia permette di ingrandire o ridurre una figura, lasciandone inalterata la forma, in particolare se $|k| > 1$, l'omotetia ingrandisce la figura mentre se $|k| < 1$ la riduce;
- se $k > 0$, due punti corrispondenti si trovano sulla stessa semiretta di origine il centro O ;
- se $k < 0$, due punti corrispondenti si trovano su semirette opposte di origine il centro O .

❖ L'omotetia con centro C qualunque

Dato un numero reale $k \neq 0$, l'**omotetia di rapporto k** e centro C è quella trasformazione geometrica che a ogni punto P del piano fa corrispondere il punto P' tale che: $\vec{CP'} = k \cdot \vec{CP}$.

Indichiamo un'omotetia di rapporto k e centro C con: $\omega_{C,k}$. Pertanto se C ha coordinate (c_1, c_2) si hanno le seguenti equazioni:

$$\omega_{C,k} : \begin{cases} x' = kx + p \\ y' = ky + q \end{cases}, \text{ con } p = c_1(1-k) \text{ e } q = c_2(1-k).$$

Viceversa, se sono note le eq. di un'omotetia di rapporto $k \neq 1$, è possibile trovare le coordinate del centro utilizzando le $p = c_1(1-k)$ e $q = c_2(1-k)$.

❖ Proprietà dell'omotetia

- un'omotetia trasforma un segmento in un segmento proporzionale;
- un'omotetia conserva le ampiezze degli angoli;
- un'omotetia trasforma una retta in una retta a essa parallela;
- componendo due omotetie con lo stesso centro C si ha ancora un'omotetia di centro C e rapporto k uguale al prodotto dei due rapporti k_1 e k_2 ;
- componendo due omotetie con centri C_1 e C_2 , si ha o una omotetia o una traslazione.

➤ LA SIMILITUDINE

Si definisce **similitudine** una particolare affinità che mantiene costante il rapporto tra segmenti corrispondenti, ossia comunque si scelgano P e Q , considerati i loro corrispondenti P' e Q' si ha:

$$\frac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = k.$$

Il valore k (sempre positivo) viene detto **rapporto di similitudine**. Indichiamo con σ una similitudine. Si può dimostrare che le eq. di una similitudine σ possono assumere solo una delle due forme seguenti:

$$\bullet \quad \sigma_1 : \begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + c \end{cases}, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}, a \geq 0, b \geq 0, (a, b) \neq (0, 0) \wedge a^2 + b^2 > 0;$$

σ_1 è una **similitudine diretta** e comunque si scelgano P e Q si ha: $\frac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = k = \sqrt{a^2 + b^2}$.

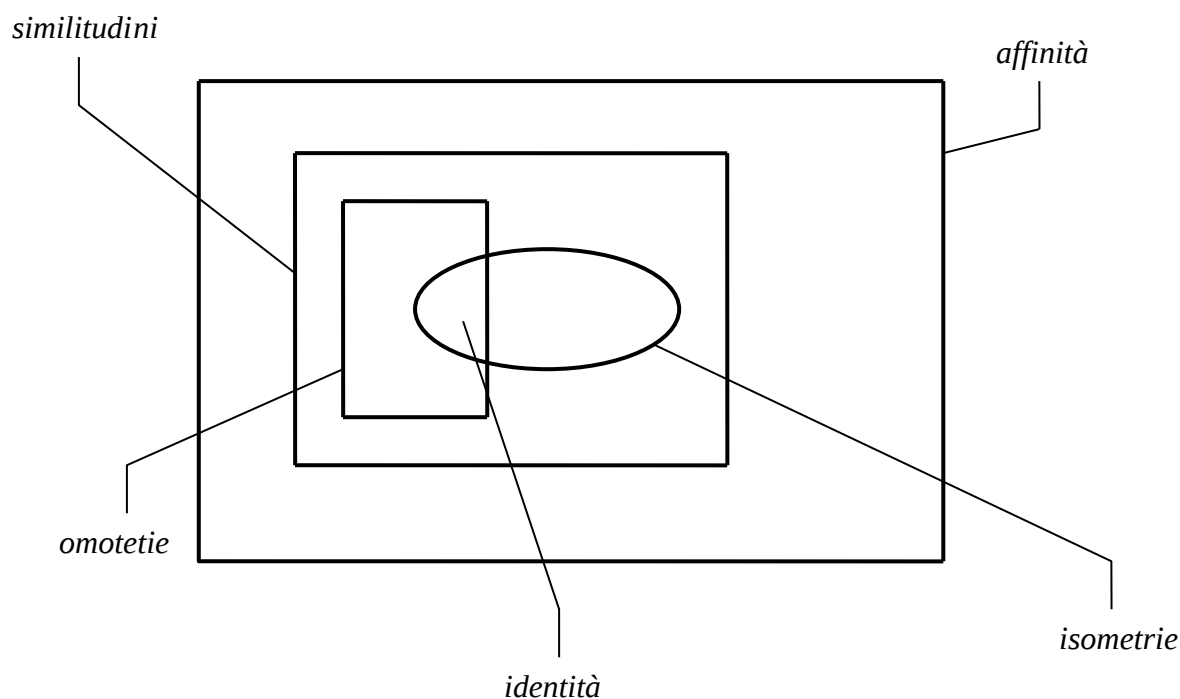
$$\bullet \quad \sigma_2 : \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = bx - ay + c \end{cases}, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}, a \geq 0, b \geq 0, (a, b) \neq (0, 0) \wedge -a^2 - b^2 < 0;$$

σ_2 è una **similitudine indiretta** e comunque si scelgano P e Q si ha: $\frac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = k = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Osservazioni

- è possibile dimostrare che tutte le isometrie sono similitudini $k=1$, in particolare, le traslazioni e le rotazioni sono similitudini dirette mentre la simmetria assiale è una similitudine indiretta;
- anche le omotetie sono casi particolari di similitudini.
- ogni similitudine conserva il rapporto fra le lunghezze, trasforma un angolo in un angolo congruente, e quindi conserva l'ampiezza degli angoli;
- trasforma rette perpendicolari in rette perpendicolari e rette parallele in rette parallele;
- trasforma circonferenze in circonferenze;
- se F' è la figura corrispondente di F , si ha che il perimetro di F' è k per il perimetro di F mentre l'area di F' è k^2 per l'area di F ;
- la composizione di una omotetia e di una isometria è sempre una similitudine;
- la composizione di due similitudini, di rapporti k_1 e k_2 è una similitudine di rapporto $k_1 \cdot k_2$;
- ogni omotetia è una similitudine;
- ogni isometria è una similitudine.

Le osservazioni di cui sopra permettono di costruire lo schema seguente **dell'insieme delle affinità**.



➤ LE AFFINITA'

Abbiamo definito come affinità una trasformazione che ha equazioni: $\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$ con $\Delta = ab' - a'b \neq 0$. Vale il seguente teorema.

Teorema

Una affinità è una similitudine se sono verificate le seguenti condizioni:

- $a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2$;
- $ab + a'b' = 0$.

Il rapporto di similitudine k è dato da: $k = \sqrt{a^2 + a'^2}$.

❖ Le dilatazioni

Le equazioni: $\begin{cases} x' = hx + p \\ y' = ky + q \end{cases}$, con $h \neq 0, k \neq 0$,

rappresentano particolari affinità chiamate **dilatazioni**; h e k sono i **rapporti di dilatazione**.

❖ Le proprietà generali delle affinità

Riassumiamo le proprietà più importanti delle **affinità**

- **Allineamento**: tre o più punti allineati si trasformano in tre o più punti allineati; quindi le rette vengono trasformate in rette e i segmenti in segmenti.
- **Parallelismo**: rette parallele sono trasformate in rette parallele. Da ciò segue che i parallelogrammi vengono trasformati in parallelogrammi.
- **Incidenza**: se due rette si incontrano in un punto P , le rette loro immagini si incontrano in un punto P' , immagine di P .
- **Coniche**: un'ellisse è trasformata in un'ellisse, una parabola in una parabola, un'iperbole in un'iperbole.
- **Rapporto tra le aree**: se la figura piana A ha per immagine A' e B ha per immagine B' , il rapporto tra le aree è costante: $S_A : S_B = S_{A'} : S_{B'}$ e si ha:

$$\frac{S_{A'}}{S_A} = |ab' - a'b|.$$

Alle proprietà delle affinità, per le **similitudini** si aggiungono le seguenti:

- il **rapporto fra le lunghezze** viene conservato;
- l'**ampiezza degli angoli** viene conservata, quindi in particolare si conserva la perpendicolarità tra rette.

Alle proprietà delle affinità e delle similitudini, per le **isometrie** si aggiunge che sono invarianti le **lunghezze** e l'**estensione delle superfici**.

Ancora, le affinità che conservano l'estensione delle superfici vengono dette **equiaffinità** o **equivalenze**. Va comunque ricordato che ci sono equivalenze che non sono isometrie.

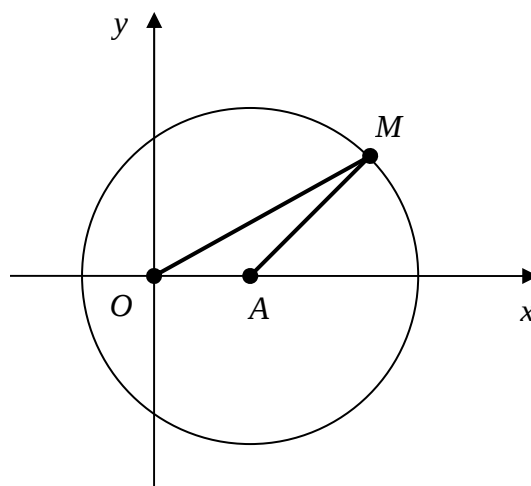
Risoluzione del tema n. 2

La circonferenza C di centro $A(1,0)$ e raggio r ha equazione:

$$(x-1)^2 + y^2 = r^2.$$

A seconda che, $0 < r < 1$, $r = 1$, $r > 1$ essa è esterna, tangente o secante l'asse y . Detto $M(\alpha, \beta)$ un suo qualsiasi punto, deve essere:

$$(\alpha - 1)^2 + \beta^2 = r^2.$$



Il baricentro P del triangolo OAM ha coordinate:

$$x_P = \frac{x_O + x_A + x_M}{3} = \frac{1 + \alpha}{3}, \quad y_P = \frac{y_O + y_A + y_M}{3} = \frac{\beta}{3}.$$

Per semplicità, indichiamo con (x, y) le coordinate di P , il luogo geometrico di questo punto, al variare di M sulla circonferenza C , deve soddisfare le seguenti relazioni:

$$x = \frac{1 + \alpha}{3}, \quad y = \frac{\beta}{3}, \quad (\alpha - 1)^2 + \beta^2 = r^2.$$

Ricavando α dalla prima eq. e β dalla seconda e sostituendo nella terza si trova l'eq. cartesiana del luogo di P :

$$(3x - 1 - 1)^2 + (3y)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{4}{3}x - \frac{r^2 - 4}{9} = 0.$$

Si tratta dunque di una circonferenza C' avente centro $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ e raggio $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{16}{9} + 4\frac{r^2 - 4}{9}} = \dots = \frac{r}{3}$.

Studiamo ora le reciproche posizioni delle due circonferenze C e C' al variare di r . Pertanto la distanza tra i loro centri è: $d = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, la differenza tra il raggio di C e quello di C' è

$d' = r - \frac{r}{3} = \frac{2}{3}r$ e la somma di tali raggi è $\sigma = r + \frac{r}{3} = \frac{4}{3}r$. Dalla geometria elementare deduciamo i seguenti fatti:

- C' è interna a C se $d < d' \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{2}{3}r \Rightarrow r > \frac{1}{2}$;
- C' è tangente internamente a C se $d = d' \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{2}{3}r \Rightarrow r = \frac{1}{2}$;
- C' e C sono secanti $d' < d < \sigma \Rightarrow \frac{2}{3}r < \frac{1}{3} < \frac{4}{3}r \Rightarrow \frac{1}{4} < r < \frac{1}{2}$;
- C' è tangente esternamente a C se $d > \sigma \Rightarrow \frac{1}{3} > \frac{4}{3}r \Rightarrow r < \frac{1}{4}$.

Dunque, visto che le due circonferenze sono secanti se: $\frac{1}{4} < r < \frac{1}{2}$, il valore di r per il quale è massima la lunghezza della corda comune alle due circonferenze deve essere compreso fra $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$.

Per trovare questo valore di r

Intersechiamo le due circonferenze, osservando che le loro intersezioni, chiamiamole A e B , hanno la medesima ascissa, che possiamo ottenere sottraendo membro a membro le eq. delle due circonferenze. Dopo facili calcoli si trova che: $x_A = x_B = \frac{5}{6} - \frac{4}{3}r^2$.

Sostituendo questo valore in una delle due eq. si trova:

$$y_A = -y_B = \frac{1}{6}\sqrt{-64r^4 + 20r^2 - 1}; \text{ avendo supposto } y_A > y_B.$$

Dunque abbiamo:

$$\overline{AB} = \frac{1}{3}\sqrt{-64r^4 + 20r^2 - 1}.$$

Cioè, $\overline{AB}$ è una funzione di r , $f(r) = \frac{1}{3}\sqrt{-64r^4 + 20r^2 - 1}$, calcoliamo la derivata prima e la poniamo maggiore di zero.

$$f'(r) = \frac{1}{3} D\sqrt{-64r^4 + 20r^2 - 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{-64r^4 + 20r^2 - 1}} D(-64r^4 + 20r^2 - 1) = \dots = \frac{20r - 128r^3}{3\sqrt{-64r^4 + 20r^2 - 1}}$$

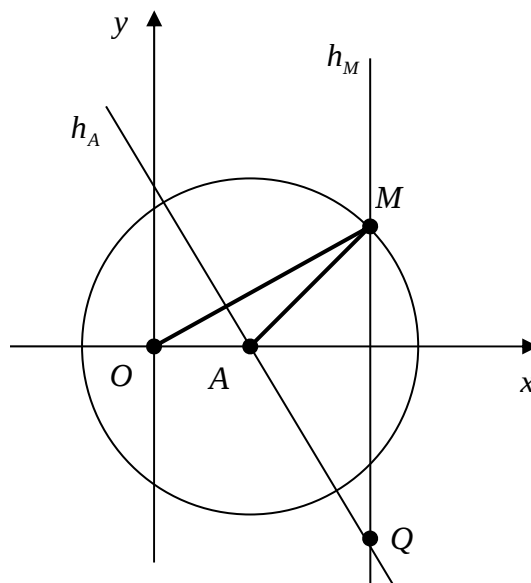
$$f'(r) > 0 \Rightarrow \frac{20r - 128r^3}{3\sqrt{-64r^4 + 20r^2 - 1}} > 0 \Rightarrow 20r - 128r^3 > 0 \Rightarrow 5 - 32r^2 > 0 \Rightarrow -\frac{\sqrt{10}}{8} < r < \frac{\sqrt{10}}{8}.$$

Pertanto il valore cercato è $r = \frac{\sqrt{10}}{8}$. Dunque, per questo valore di r , si ha il massimo della lunghezza della corda comune alle due circonferenze C e C' ; e questo valore massimo è:

$$\max \overline{AB} = \frac{1}{3} \sqrt{-64 \left(\frac{\sqrt{10}}{8} \right)^4 + 20 \left(\frac{\sqrt{10}}{8} \right)^2 - 1} = \dots = \frac{1}{4}.$$

Evidentemente risulta: $A\left(\frac{5}{8}, \frac{1}{8}\right), \quad B\left(\frac{5}{8}, -\frac{1}{8}\right).$

Per quanto riguarda la seconda parte di questo tema, incominciamo a trovare l'eq. della retta OM , evidentemente l'eq. di OM è $y = \frac{\beta}{\alpha}x$. Determiniamo quindi l'eq. della retta h_A , perpendicolare ad



OM condotta per A e l'eq. della retta h_M , perpendicolare ad OA condotta per M . Dopo facili calcoli si trova: $h_A : y = -\frac{\alpha}{\beta}(x-1)$, $h_M : x = \alpha$. Naturalmente il punto d'intersezione di h_A con h_M è l'ortocentro Q del triangolo OAM , dunque le coordinate (x, y) di questo punto devono soddisfare le seguenti condizioni:

$$x = \alpha, \quad y = -\frac{\alpha}{\beta}(x-1), \quad (\alpha-1)^2 + \beta^2 = 1.$$

Nella seconda eq., sostituiamo ad α il valore x e ricaviamo $\beta = \frac{x-x^2}{y}$, e poi, nella terza equazione sostituiamo, α con x e β con $\frac{x-x^2}{y}$, quindi si ha: $(x-1)^2 + \left(\frac{x-x^2}{y}\right)^2 = 1$; quest'ultima dopo facili calcoli può porsi nella forma:

$$y^2 = \frac{x(1-x)^2}{2-x}.$$

Pertanto possiamo procedere con i metodi dell'analisi matematica, considerando le seguenti due funzioni:

$$y = -\sqrt{\frac{x(1-x)^2}{2-x}}, \quad y = \sqrt{\frac{x(1-x)^2}{2-x}}.$$

Si tratta di due funzioni l'una simmetrica dell'altra rispetto all'asse delle ascisse, quindi è sufficiente studiarne solamente una, noi studiamo solo la seconda.

Studio della funzione:

$$y = \sqrt{\frac{x(1-x)^2}{2-x}}.$$

Calcoliamo il dominio, deve essere:
$$\begin{cases} 2-x \neq 0 \\ \frac{x(1-x)^2}{2-x} \geq 0 \end{cases}.$$

Evidentemente risulta $2-x \neq 0$ per $x \neq 2$, risolviamo quindi: $\frac{x(1-x)^2}{2-x} \geq 0$, essa è equivalente

alla: $\frac{x}{2-x} \geq 0$. $N \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$; $D > 0 \Rightarrow 2-x > 0 \Rightarrow -x > -2 \Rightarrow x < 2$.

Quindi abbiamo:

	0	2	
N	-	+	+
D	+	+	-
$\frac{N}{D}$	-	+	-

Dunque il dominio è l'intervallo $[0, 2[$. Pertanto in questo intervallo la funzione è continua, studiamo quindi il comportamento agli estremi del dominio:

$y(0) = 0$, quindi la curva passa per O , ancora: $\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{\frac{x(1-x)^2}{2-x}} = \sqrt{\frac{2(1-2)^2}{2-2}} = \sqrt{\frac{2}{0}} = +\infty$; pertanto la retta di eq. $x = 2$ è un asintoto superiore.

Osserviamo ancora che: $y = 0 \Rightarrow x(1-x)^2 = 0$, cioè $x = 0$ oppure $x = 1$ (2 volte); quindi, la curva, oltre ad O , ha in comune con l'asse delle ascisse anche il punto $A(1, 0)$ che deve essere conteggiato 2 volte.

Calcolo e studio della derivata prima.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x(1-x)^2}{2-x}}} \cdot D \frac{x(1-x)^2}{2-x} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x(1-x)^2}{2-x}}} \cdot \frac{[(1-x)^2 - 2x(1-x)](2-x) + x(1-x)^2}{(2-x)^2};$$

dopo alcune “conti” si ha:

$$y' = \frac{1-x}{|1-x|} \cdot \frac{x^2 - 3x + 1}{\sqrt{x(2-x)^3}}.$$

Evidentemente la funzione non è derivabile nei punti $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

Vediamo il segno di y' cioè, risolviamo la: $\frac{1-x}{|1-x|} \cdot \frac{x^2-3x+1}{\sqrt{x(2-x)^3}} > 0$ essa, per $x \neq 0, x \neq 1, x \neq 2$ è equivalente alla: $(1-x)(x^2-3x+1) > 0$, dunque si ha:

$$1-x > 0 \Rightarrow -x > -1 \Rightarrow x < 1; \quad x^2-3x+1 > 0 \Rightarrow x < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

	0	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$	1	2	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$
$1-x$		+	+	-	
x^2-3x+1		+	-	-	
y'		+	-	+	
y		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Il punto B di ascissa $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ è di massimo relativo mentre il punto di ascissa $x = 1$ cioè A è di minimo assoluto. Ancora:

$$y_B = y\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = \dots = \sqrt{\frac{5\sqrt{5}-11}{2}} \cong 0,30 \Rightarrow B\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \sqrt{\frac{5\sqrt{5}-11}{2}}\right) \Rightarrow B(0,38; 0,30).$$

Calcoliamo anche i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-x}{|1-x|} \cdot \frac{x^2-3x+1}{\sqrt{x(2-x)^3}} = \dots = +\infty, \text{ dunque la curva è tangente in } O \text{ all'asse } y;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} y' = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x}{|1-x|} \cdot \frac{x^2-3x+1}{\sqrt{x(2-x)^3}} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} y' = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{|1-x|} \cdot \frac{x^2-3x+1}{\sqrt{x(2-x)^3}} = -1, \text{ dunque il punto } A \text{ è}$$

un punto angoloso con tangente destra di eq. $y = x - 1$ e tangente sinistra di eq. $y = -(x - 1)$.

Calcolo e studio della derivata seconda.

Distinguiamo due casi: $x < 1$ e $x > 1$. Per $x < 1$ si ha:

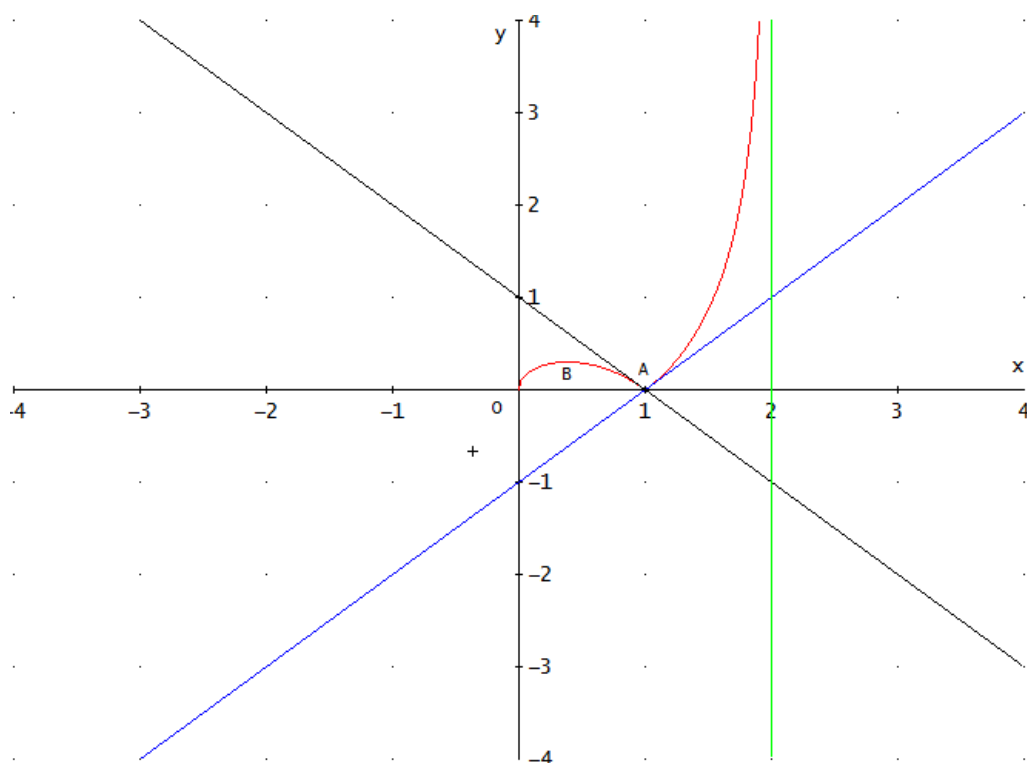
$$y'' = D\left(\frac{1-x}{|1-x|} \cdot \frac{x^2-3x+1}{\sqrt{x(2-x)^3}}\right) = \dots = -\frac{x+1}{\sqrt{x^3(2-x)^5}};$$

dunque $y'' < 0 \quad \forall x \in]0, 1[$ pertanto in questo intervallo la curva volge la concavità verso il basso.

$$\text{Per } x > 1 \text{ si ha: } y'' = D\left(\frac{1-x}{|1-x|} \cdot \frac{x^2-3x+1}{\sqrt{x(2-x)^3}}\right) = \dots = \frac{x+1}{\sqrt{x^3(2-x)^5}};$$

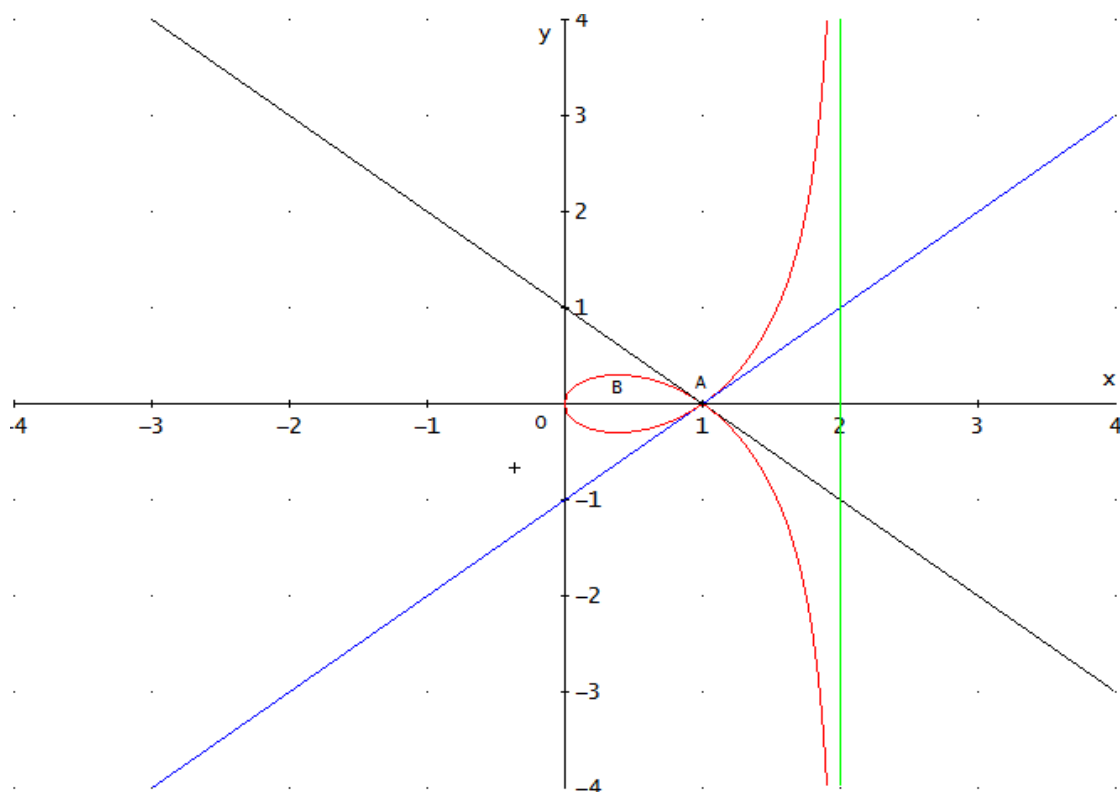
dunque $y'' > 0 \quad \forall x \in]1, 2[$ pertanto in questo intervallo la curva volge la concavità verso l'alto.

Tutte le informazioni ottenuti danno luogo al primo grafico della pagina seguente.



Ritorniamo ora alla: $y^2 = \frac{x(1-x)^2}{2-x}$, per disegnarla dobbiamo rappresentare anche la:

$y = -\sqrt{\frac{x(1-x)^2}{2-x}}$. Quindi abbiamo il grafico seguente:



Sulla curva dell'ultimo grafico, cioè la curva di eq. $y^2 = \frac{x(1-x)^2}{2-x}$ chiamata **strofoide**, vogliamo aggiungere alcune considerazioni supplementari.

CAPITOLO 3.2

CONCORSO ORDINARIO 1990

Il candidato risolva o sviluppi tre quesiti di cui uno scelto tra quelli proposti per l'ambito delle scienze matematiche, uno tra quelli delle scienze fisiche ed uno tra quelli proposti per l'area delle scienze chimiche e naturali.

Scienze matematiche

1. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy , è assegnata la curva K di equazione:

$$y = \sqrt{\sqrt{4x^2 + 1} - (x^2 + 1)}$$

- Studiarla e disegnarne l'andamento dopo aver determinato, in particolare, le equazioni delle rette tangenti ad essa nel punto di ascissa 0 e nei punti estremi del dominio.
- Utilizzando K , disegnare la curva L (*lemniscata di Bernoulli*) di equazione:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0.$$

- Determinato l'insieme M dei movimenti che mutano L in sé, studiare la struttura algebrica $(M, \otimes)$ dove “ $\otimes$ ” rappresenta la composizione di due movimenti.
 - Fornire due modelli di strutture algebriche isomorfe a $(M, \otimes)$, dei quali uno al più scelto nel campo della geometria.
2. *La duplicazione del quadrato*. Il candidato illustri il problema con considerazioni storiche e didattiche ed esponga almeno una dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$. Successivamente:
- dia una costruzione geometrica di a , con $a \in \mathbb{N}$ non quadrato;
 - illustri un procedimento di calcolo per a codificandolo in un linguaggio di programmazione;
 - se Q denota l'insieme dei numeri razionali illustri la struttura algebrica dell'ampliamento algebrico $Q(\sqrt{a})$;
 - mostri infine che Q è equipotente all'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali.
3. Dopo aver fornito la definizione di poliedro regolare, dimostrare il teorema che assicura che esistono al più 5 poliedri regolari. Come noto, tali poliedri sono esattamente 5: elencarli e specificarne le caratteristiche (somma delle facce dei triedri, numero delle facce, dei vertici, degli spigoli).
Fermata l'attenzione sull'esaedro regolare, studiare in maniera esauriente e col metodo preferito, le sue sezioni con i piani perpendicolari ad una sua diagonale.

Scienze fisiche

Trattazione teorica e presentazione di una proposta didattica su uno dei seguenti temi:

1. Il campo gravitazionale.
2. I principi della termodinamica.
3. Le onde elettromagnetiche.

Scienze chimiche e naturali

Trattazione teorica e presentazione di una proposta didattica su uno dei seguenti temi:

1. Il ciclo delle acque nei sistemi abiologici e biologici.
2. Un apparato o un sistema dell'uomo sotto l'aspetto strutturale/funzionale (anatomico e fisiologico) e sotto quello patologico (possibili squilibri e conseguenze sulla salute).
3. La chimica del Carbonio ed il suo ruolo nei sistemi abiologici e biologici.

Durata massima della prova: ore 8.

E' consentito soltanto l'uso del dizionario di italiano e di calcolatrice non programmabile.

E' fatto divieto di svolgere più di un solo quesito per ciascuno degli ambiti, pena l'annullamento della prova.

Ci occuperemo in questo capitolo solo della risoluzione del tema numero 1 di matematica.

Risoluzione del tema n. 1

Evidentemente si tratta di una funzione non negativa e pari, quindi la studiamo solamente per $x \geq 0$.

Incominciamo col calcolare il dominio, dunque deve essere: $\sqrt{4x^2 + 1} - (x^2 + 1) \geq 0$ ossia:

$$\sqrt{4x^2 + 1} \geq (x^2 + 1);$$

essendo ambo i membri strettamente positivi eleviamo ambo i membri al quadrato:

$$4x^2 + 1 \geq x^4 + 2x^2 + 1;$$

ossia:

$$4x^2 - x^4 - 2x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2(2 - x^2) \geq 0 \Rightarrow 2 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}.$$

Pertanto il dominio della nostra funzione è: $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

Eventuali intersezioni con gli assi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{4x^2 + 1} - (x^2 + 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = 0 \\ y = \sqrt{4x^2 + 1} - (x^2 + 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0, x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2} \end{cases}.$$

Calcolo e studio della derivata prima.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{4x^2 + 1} - (x^2 + 1)} D(\sqrt{4x^2 + 1} - (x^2 + 1)) = \dots = \frac{x(2 - \sqrt{4x^2 + 1})}{\sqrt{4x^2 + 1} \sqrt{\sqrt{4x^2 + 1} - (x^2 + 1)}},$$

riassumendo:

$$y' = \frac{x(2 - \sqrt{4x^2 + 1})}{\sqrt{4x^2 + 1} \sqrt{\sqrt{4x^2 + 1} - (x^2 + 1)}}.$$

Si evince quindi che la funzione non è derivabile nei punti di ascissa $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{2}$, pertanto si rende necessario calcolare i seguenti limiti:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(2 - \sqrt{4x^2 + 1})}{\sqrt{4x^2 + 1} \sqrt{\sqrt{4x^2 + 1} - (x^2 + 1)}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(2 - \sqrt{4x^2 + 1}) \sqrt{\sqrt{4x^2 + 1} + (x^2 + 1)}}{\sqrt{4x^2 + 1} \sqrt{\sqrt{4x^2 + 1} - (x^2 + 1)} \sqrt{\sqrt{4x^2 + 1} + (x^2 + 1)}} = \\ &= \dots = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(2 - \sqrt{4x^2 + 1}) \sqrt{\sqrt{4x^2 + 1} + (x^2 + 1)}}{\sqrt{4x^2 + 1} \sqrt{2 - x^2}} = \dots = 1; \\ \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} \frac{x(2 - \sqrt{4x^2 + 1})}{\sqrt{4x^2 + 1} \sqrt{\sqrt{4x^2 + 1} - (x^2 + 1)}} &= \frac{\sqrt{2} \cdot (-1)}{3 \cdot \sqrt{3 - 3}} = \frac{-\sqrt{2}}{0^+} = -\infty. \end{aligned}$$

Dunque, la funzione nel punto di ascissa $x_1 = 0$, ha per tangente la retta: $y = x$ essendo 1 il coefficiente angolare, mentre, nel punto di ascissa $x_2 = \sqrt{2}$, la tangente è verticale.

Segno della derivata prima

$$y' > 0 \Rightarrow \frac{x(2 - \sqrt{4x^2 + 1})}{\sqrt{4x^2 + 1} \sqrt{\sqrt{4x^2 + 1} - (x^2 + 1)}} > 0 \Rightarrow x(2 - \sqrt{4x^2 + 1}) > 0.$$

$$\text{Risolviamo: } (2 - \sqrt{4x^2 + 1}) > 0 \Rightarrow 2 > \sqrt{4x^2 + 1} \Rightarrow 4 > 4x^2 + 1 \Rightarrow 4x^2 - 3 < 0 \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} < x < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
x	-	-	+	+
$2 - \sqrt{4x^2 + 1}$	-	+	+	-
y'	+	-	+	-
				

Abbiamo un minimo assoluto nel punto di ascissa $x_1 = 0$ e due massimi relativi nei punti di ascissa $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Calcoliamo le ordinate:

$$y(0) = 0, \quad y\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{\sqrt{4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1} - \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1\right)} = \dots = \frac{1}{2}.$$

Quindi abbiamo: $O(0,0)$; $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Calcolo e studio della derivata seconda. Omettendo i calcoli alla fine si ha:

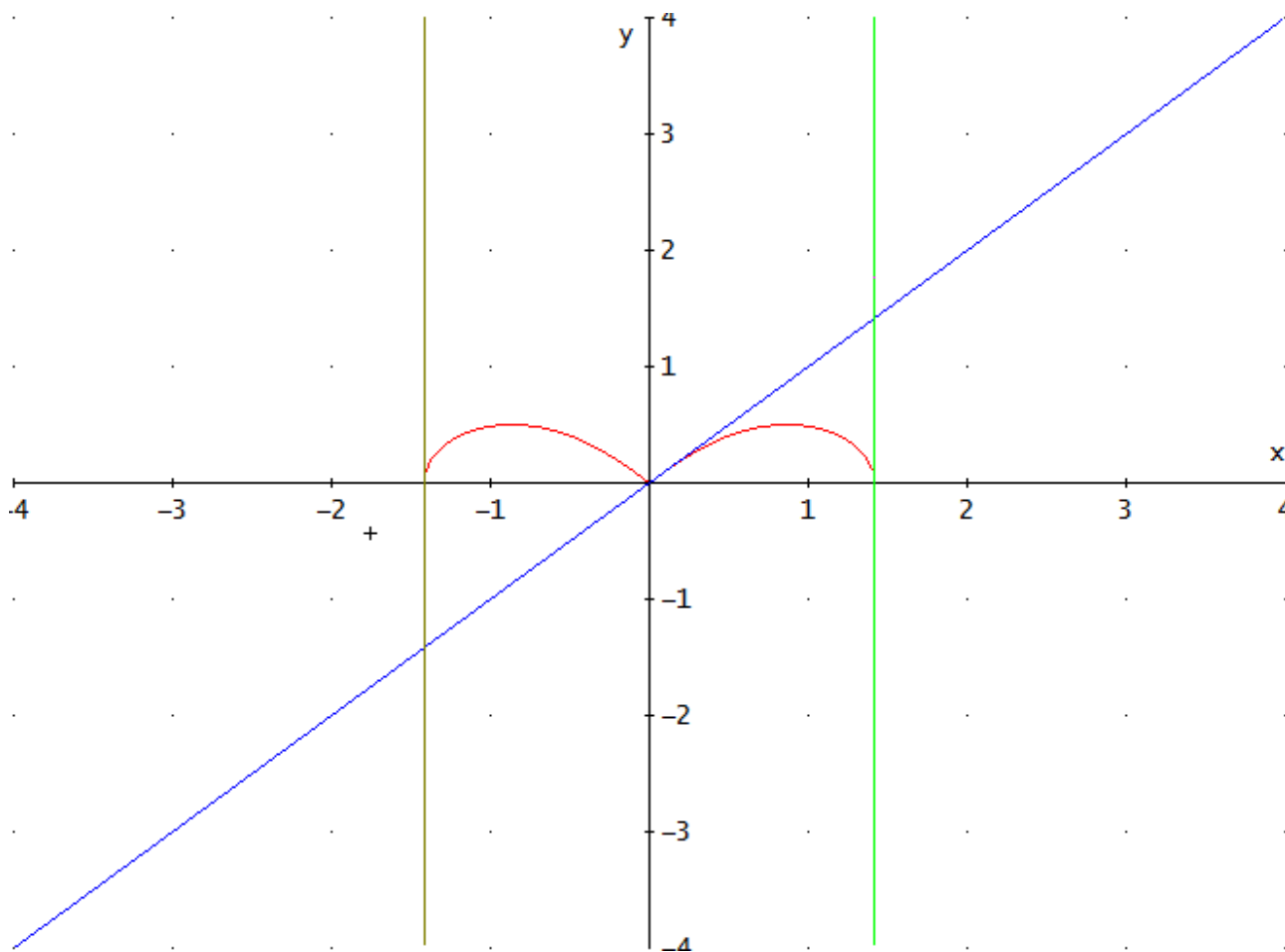
$$y'' = \frac{3(\sqrt{4x^2 + 1} - 2x^2 - 1)}{(\sqrt{4x^2 + 1} - (x^2 + 1))\sqrt{\sqrt{4x^2 + 1} - (x^2 + 1)}(4x^2 + 1)\sqrt{4x^2 + 1}}$$

Segno della derivata seconda.

$$y'' > 0 \Rightarrow \frac{3(\sqrt{4x^2 + 1} - 2x^2 - 1)}{(\sqrt{4x^2 + 1} - (x^2 + 1))\sqrt{\sqrt{4x^2 + 1} - (x^2 + 1)}(4x^2 + 1)\sqrt{4x^2 + 1}} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{4x^2 + 1} - 2x^2 - 1 > 0 \Rightarrow \sqrt{4x^2 + 1} > 2x^2 + 1 \Rightarrow 4x^2 + 1 > 4x^4 + 4x^2 + 1 \Rightarrow 0 > 4x^4.$$

Dunque la derivata seconda è sempre non positiva quindi la funzione è sempre concava verso il basso e non presenta punti di flesso.



Per quanto riguarda il secondo punto, elevando ambo i membri della: $y = \sqrt{\sqrt{4x^2 + 1} - (x^2 + 1)}$ al quadrato, si ha:

$$y^2 = \sqrt{4x^2 + 1} - (x^2 + 1);$$

ossia:

$$y^2 + x^2 + 1 = \sqrt{4x^2 + 1};$$

elevando ancora ambo i membri al quadrato, si ha:

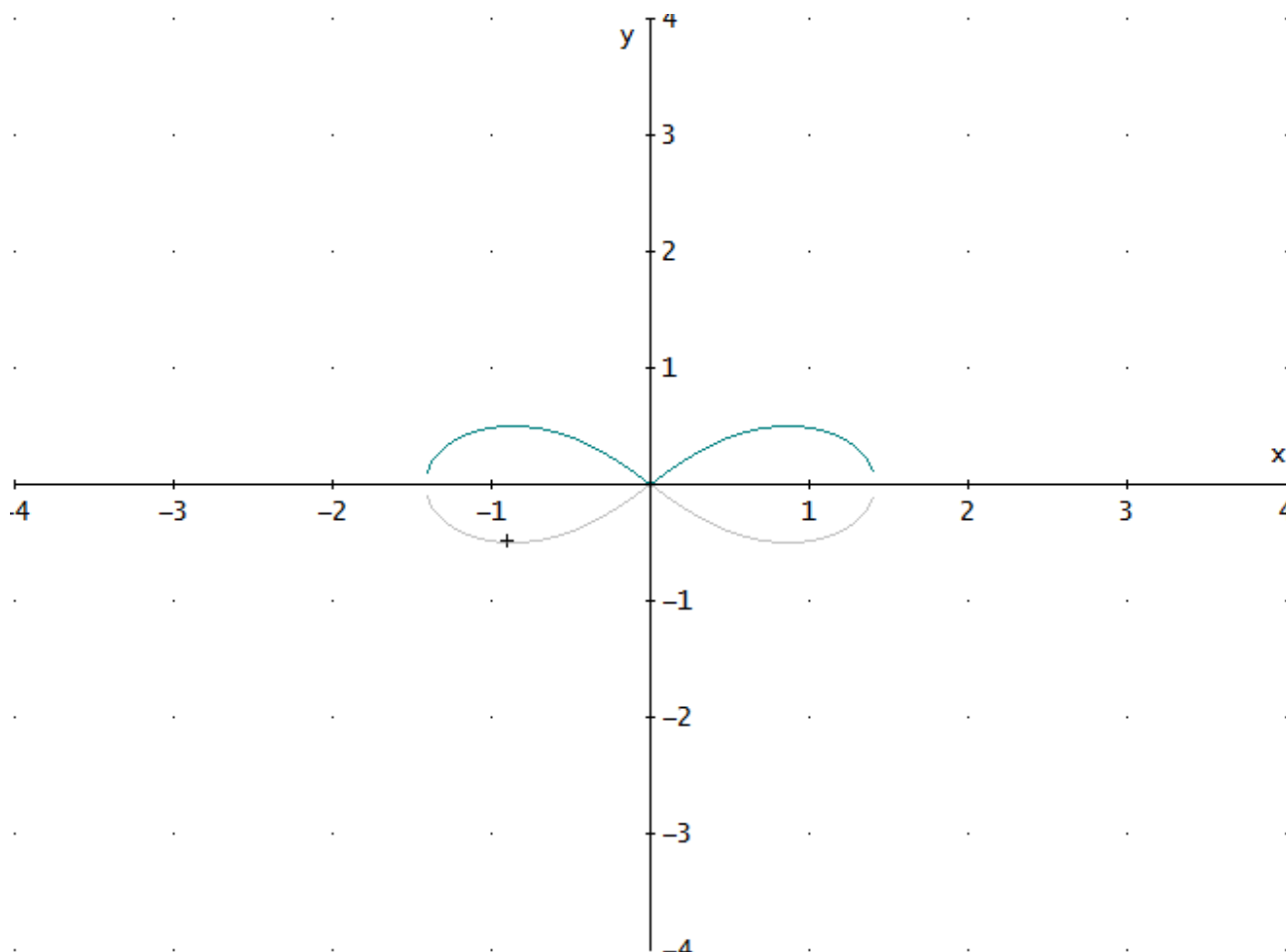
$$x^4 + y^4 + 1 + 2x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 = 4x^2 + 1$$

Ossia:

$$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2 = 0;$$

$$(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0.$$

Appunto la lemniscata di Bernoulli, pertanto il grafico sarà:



cioè l'unione dei grafici di:

$$y = \sqrt{\sqrt{4x^2 + 1} - (x^2 + 1)}; \quad y = -\sqrt{\sqrt{4x^2 + 1} - (x^2 + 1)}.$$

Per quanto riguarda il terzo e quarto punto, invece di fornire la soluzione, riteniamo più interessante fare una “panoramica” sulle strutture algebriche, cioè, mettere il lettore, nelle condizioni, non solo di risolvere i citati quesiti, ma, altri.

➤ STRUTTURE ALGEBRICHE

❖ Le operazioni interne

Conosciamo diverse operazioni definite negli insiemi numerici, per esempio l'addizione, la moltiplicazione nell'insieme dei numeri naturali.

Un'operazione è **interna** nell'insieme nel quale è definita quando ad ogni coppia di numeri dell'insieme fa corrispondere un numero appartenente all'insieme stesso.

Vogliamo ora generalizzare il concetto di operazione, infatti, questo concetto viene esteso ad un insieme di natura qualunque. Così ad esempio, nell'insieme delle parti, ossia l'insieme costituito da tutti e soli i sottoinsiemi di un dato insieme X , l'unione e l'intersezione sono operazioni interne, in quanto ad ogni coppia di sottoinsiemi di X associa ancora un sottoinsieme di X .

Anche nella logica troviamo delle operazioni interne. Nell'insieme delle proposizioni la congiunzione $\wedge$ e la disgiunzione $\vee$ sono operazioni interne, in quanto associano a due proposizioni ancora una proposizione.

Tutte queste operazioni sono **binarie**, perché operano su due elementi di un insieme. Esistono anche operazioni non binarie come per esempio la negazione di una proposizione logica o il valore assoluto di un numero relativo. Nel resto del presente capitolo considereremo soltanto operazioni binarie.

Le analogie presenti in queste ed in altre diverse situazioni, hanno indotto i matematici, a dare una definizione di operazione interna che è indipendente dagli “oggetti” matematici coinvolti (numeri, insiemi, proposizioni ...) sui quali si opera.

Definizione

Legge di composizione interna

Una legge di composizione interna in un insieme A è una funzione $\alpha : A \times A \rightarrow A$ che a ogni coppia ordinata (a, b) di $A \times A$ associa uno e un solo elemento c di A .

Osservazione: Aniché scrivere $c = \alpha(a, b)$ si preferisce la notazione più agile $c = a \alpha b$. D'ordinario invece di usare il generico simbolo α , usiamo i simboli: $\circ, +, \times$. Scriviamo quindi $c = a \circ b$, $c = a + b$, $c = a \times b$ (oppure $a \cdot b$, ab). La notazione con il simbolo $\circ$ (che si legge “tondino”) è detta generale (avvolte si usa anche il simbolo $*$), la seconda additiva, la terza moltiplicativa. Se indichiamo col simbolo $\circ$ una generica legge di composizione, per esprimere che c è il risultato dell'operazione fra a e b possiamo utilizzare anche la seguente scrittura: $(a, b) \xrightarrow{\circ} c$ in ogni caso leggiamo “ a composto b è uguale a c ” oppure “ a tondino b uguale c ”.

Esempio 1

L'addizione e la moltiplicazione sono leggi di composizione interne in N . Per indicarle possiamo usare anche scritture del tipo:

$$(5, 3) \xrightarrow{+} 8; \quad (5, 3) \xrightarrow{\times} 15 \quad \text{od anche:} \quad + (5, 3) \rightarrow 8; \quad \times (5, 3) \rightarrow 15.$$

Esempio 2

Nell'insieme dei punti di un piano la funzione α che associa ad ogni coppia di punti (A, B) il punto medio del segmento AB è una legge di composizione interna.

❖ Le tabelle delle operazioni

Un'operazione può essere definita in un insieme, che abbia un numero finito di elementi, anche solo mediante una tabella.

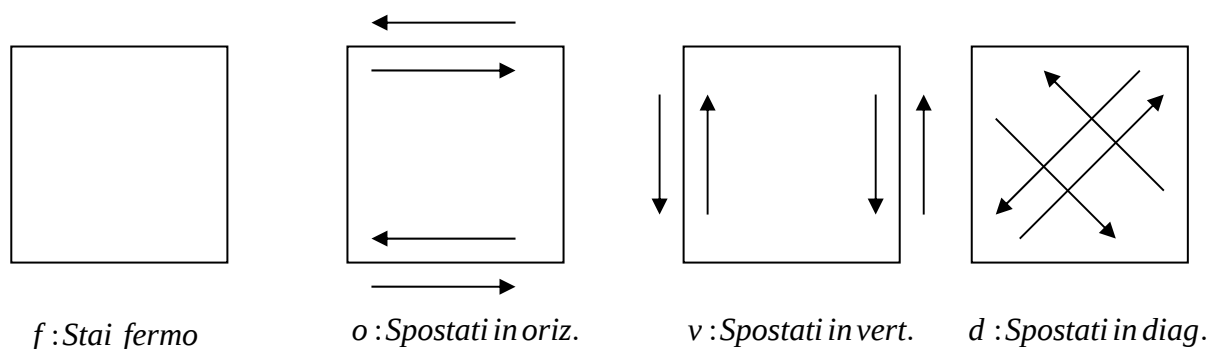
Esempio 3 Dato l'insieme $A = \{\nabla, \times, a\}$ possiamo definire un'operazione $\circ$:

$\circ$	∇	$\times$	a
∇	∇	$\times$	a
$\times$	$\times$	a	∇
a	a	∇	$\times$

Per sapere il valore di $\nabla \circ \times$ si considera la riga che ha come primo elemento ∇ e la colonna che ha come primo elemento $\times$: $\nabla \circ \times$ è la loro intersezione, ossia $\times$. Analogamente: $(a, \times) \xrightarrow{\circ} \nabla$ e $(a, a) \xrightarrow{\circ} \times$.

Esempio 4 Un robot che si sposta

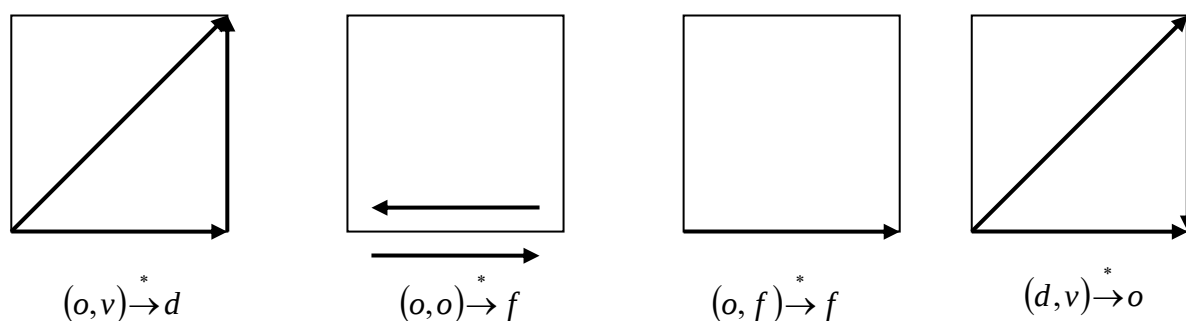
Supponiamo di avere un piccolo robot che può muoversi da un vertice all'altro di un quadrato secondo gli spostamenti indicati nella seguente figura.



Consideriamo l'insieme dei quattro spostamenti $S = \{f, o, v, d\}$. Possiamo definire come operazione la composizione fra spostamenti, ossia lo spostamento complessivo che il robot compie se gli diamo, uno dopo l'altro, i comandi relativi a due spostamenti. Indichiamo tale operazione col simbolo $*$. Essa è una legge di composizione interna, in quanto lo spostamento complessivo è ancora uno dei quattro spostamenti. Si ha la seguente tabella:

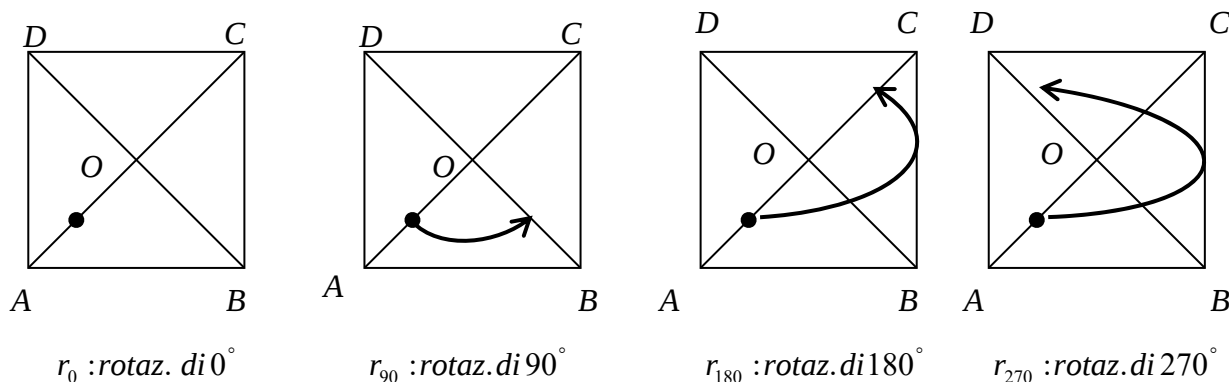
$*$	f	o	v	d
f	f	o	v	d
o	o	f	d	∇
v	v	d	f	o
d	d	∇	o	f

Infatti si ha:



Esempio 5 Le rotazioni di un quadrato in sé

Consideriamo un quadrato $ABCD$ e facciamolo ruotare intorno al suo centro in modo che si sovrapponga a se stesso (figura sotto).



Consideriamo l'insieme delle quattro rotazioni $R = \{r_0, r_{90}, r_{180}, r_{270}\}$. L'operazione che fa seguire a una rotazione di R una seconda rotazione di R è una legge di composizione interna, in quanto genera una rotazione complessiva che è ancora una rotazione di R . Indichiamo tale operazione col simbolo $\otimes$. Si ha la seguente tabella:

$\otimes$	r_0	r_{90}	r_{180}	r_{270}
r_0	r_0	r_{90}	r_{180}	r_{270}
r_{90}	r_{90}	r_{180}	r_{270}	r_0
r_{180}	r_{180}	r_{270}	r_0	r_{90}
r_{270}	r_{270}	r_0	r_{90}	r_{180}

Esempio 6 Le operazioni nell'aritmetica modulare

Prendiamo in esame la cosiddetta aritmetica dell'orologio, cioè riteniamo "equivalenti" nell'insieme dei numeri naturali i numeri: $0, 12, 24, 36, 48, \dots$; i numeri: $1, 13, 25, 37, 49, \dots$; i numeri: $2, 14, 26, 38, 50, \dots$; ...; $11, 23, 35, 47, 59, \dots$. In altri termini riteniamo equivalenti i numeri che hanno lo stesso resto rispetto alla divisione per 12. Per esempio, $14 \equiv 38$ (14 equivalente a 38) perché le due divisioni $14:12$ e $38:12$ hanno lo stesso resto 2. Evidentemente la relazione definita è di equivalenza, in quanto valgono le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva. Pertanto se consideriamo le classi dei numeri fra loro equivalenti, si formano 12 sottoinsiemi di N che costituiscono una partizione di N e vengono anche detti **classi resto modulo 12**. Se consideriamo l'insieme **quoziente**, cioè l'insieme costituito da questi dodici sottoinsiemi, in esso possiamo introdurre due operazioni interne. Per chiarire meglio, indichiamo i 12 sottoinsiemi così:

$$[0] = \{0, 12, 24, 36, 48, \dots\}; [1] = \{1, 13, 25, 37, 49, \dots\}; \dots; [11] = \{11, 23, 35, 47, 59, \dots\}.$$

Indichiamo l'insieme quoziente così: $N_{12} = \{[0], [1], \dots, [11]\}$, evidentemente l'insieme quoziente possiede 12.

Osservazione: il ruolo giocato dal numero 12 può essere giocato anche da un altro numero naturale n , diverso da 1 e da 0, per esempio 4, mutatis mutandis nascono le **classi resto modulo 4** ecc., ecc., quindi $N_4 = \{[0], [1], \dots, [3]\}$ ed ha 4 elementi.

Per questione di semplicità definiamo le due operazioni nell'insieme $N_4 = \{[0], [1], \dots, [3]\}$ mediante le seguenti due tabelle.

+	[0]	[1]	[2]	[3]		×	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]		[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[1]	[2]	[3]	[0]		[1]	[0]	[1]	[2]	[3]
[2]	[2]	[3]	[0]	[1]		[2]	[0]	[2]	[0]	[2]
[3]	[3]	[0]	[1]	[2]		[3]	[0]	[3]	[2]	[1]

➤ LE STRUTTURE E LE LORO PROPRIETÀ

Definizione

Struttura algebrica

In un insieme è presente una struttura algebrica se in esso sono definite una o più operazioni interne.

Se la struttura di un insieme A è generata dall'operazione $\circ$, la struttura è la coppia costituita dall'insieme e dall'operazione; la indichiamo con $(A, \circ)$. L'insieme A viene anche detto **sostegno** della struttura.

Esempio

$(N, +)$ è la struttura costituita dall'insieme N dei numeri naturali e dall'operazione (interna) di addizione fra numeri naturali.

❖ La proprietà associativa

Data la struttura $(A, \circ)$, l'operazione $\circ$ è **associativa** se: $\forall x, y, z \in A \Rightarrow (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.

Esempio

In N l'addizione e la moltiplicazione sono operazioni che godono della proprietà associativa. Per esempio:

$$(4 + 7) + 1 = 4 + (7 + 1) \text{ così pure } (4 \cdot 7) \cdot 3 = 4 \cdot (7 \cdot 3)$$

mentre in $Q - \{0\}$ cioè nell'insieme dei numeri razionali, la divisione **non** è associativa:

$$(24 : 4) : 2 \neq 24 : (4 : 2) \text{ infatti } (24 : 4) : 2 = 6 : 2 = 3 \text{ e } 24 : (4 : 2) = 24 : 2 = 12.$$

Quando l'operazione è associativa, la struttura si dice **semigrupp**.

Osservazione: in un semigrupp possiamo evitare di scrivere le parentesi:

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) = x \circ y \circ z.$$

❖ La proprietà commutativa

Data la struttura $(A, \circ)$, l'operazione $\circ$ è **commutativa** se: $\forall x, y \in A \Rightarrow x \circ y = y \circ x$.

Mutatis mutandis si vede che in N l'addizione e la moltiplicazione sono operazioni che godono della proprietà commutativa, mentre in Z cioè nell'insieme dei numeri interi relativi, la sottrazione **non** è commutativa.

❖ L'elemento neutro

Data la struttura $(A, \circ)$, l'elemento $e \in A$ è elemento **neutro** dell'operazione $\circ$ se:
 $\forall x \in A \Rightarrow x \circ e = e \circ x = x$.

Esempio In $(N, +)$ l'elemento neutro è 0, in $(N, \times)$ l'elemento neutro è 1.

Teorema 1 Se una struttura $(A, \circ)$ ha elemento neutro, esso è unico.

Dim.: supponiamo, per assurdo, che esistano due elementi neutri distinti e' e e'' . Se e' è elemento neutro si ha: $e' \circ e'' = e''$; se e'' è elemento neutro si ha: $e'' \circ e' = e'$. Confrontando queste due uguaglianze si ha: $e'' = e' \circ e'' = e'$, quindi i due elementi neutri devono coincidere. C.V.D..

Una struttura in cui vale la proprietà associativa ed esiste l'elemento neutro si dice **monoide**.

❖ Gli elementi simmetrici

Data la struttura $(A, \circ)$, per ogni elemento $x \in A$ esiste il **simmetrico** x' se:
 $\forall x \in A, \exists x' \in A$ tale che $x \circ x' = x' \circ x = e$.

Esempio In $(Z, +)$ l'elemento neutro è 0 ed esiste sempre il simmetrico di un numero. E' quello che chiamiamo opposto. Per esempio, il simmetrico di -7 è $+7$ perché $(-7) + (+7) = 0$.

Teorema 2 In un monoide $(M, \circ)$, il simmetrico del simmetrico di un elemento m è l'elemento stesso. In simboli: $(m')' = m$.

Dim.: se $(m')'$ è simmetrico di m' si ha: $(m')' \circ m' = e$. Componiamo a destra con m ambo i membri: $[(m')' \circ m'] \circ m = e \circ m$. Applicando la proprietà associativa al primo membro e la definizione di elemento neutro al secondo si ha: $(m')' \circ [m' \circ m] = m$ e ancora poiché m' è simmetrico di m si ha: $(m')' \circ e = m$ ossia: $(m')' = m$ essendo e elemento neutro. C.V.D..

Teorema 3 In un monoide $(M, \circ)$, quando esiste il simmetrico di un elemento esso è unico.

Dim.: supponiamo, per assurdo, che l'elemento $m \in M$ abbia due simmetrici distinti m' e m'' . Per la proprietà associativa, potremmo scrivere: $(m' \circ m) \circ m'' = m' \circ (m \circ m'')$ per la definizione di simmetrico si ha: $e \circ m'' = m' \circ e$ ossia: $m'' = m'$ essendo e elemento neutro. C.V.D..

➤ LA STRUTTURA DI GRUPPO

Definizione

Gruppo

Un gruppo è una struttura algebrica $(G, \circ)$ nella quale l'operazione $\circ$ gode delle seguenti proprietà:

a. è associativa:

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) \quad \forall x, y, z \in G;$$

b. esiste ed appartiene a G l'elemento neutro e :

$$x \circ e = e \circ x = x \quad \forall x \in G;$$

c. per ogni elemento x di G esiste in G l'elemento simmetrico x' :

$$\forall x \in G, \exists x' \in G \text{ tale che } x \circ x' = x' \circ x = e.$$

Quando l'operazione $\circ$ gode anche della proprietà commutativa, ossia se:

$$\forall x, y \in G \Rightarrow x \circ y = y \circ x$$

il gruppo si dice **commutativo** o **abeliano**.

Esempio 1 $(\mathbb{Z}, +)$ è un gruppo, anzi un gruppo abeliano. Infatti l'addizione in $\mathbb{Z}$ è associativa, esiste l'elemento neutro 0 e per ogni elemento di $\mathbb{Z}$ esiste il simmetrico (opposto) sempre in $\mathbb{Z}$ ed inoltre l'addizione in $\mathbb{Z}$ è anche commutativa.

Esempio 2 $(\mathbb{N}, +)$ non è un gruppo. Infatti, l'addizione in $\mathbb{N}$ pur essendo associativa e pur esistendo l'elemento neutro 0, l'unico elemento ad avere simmetrico è 0.

Esempio 3 $(\mathbb{N}_4, +)$, cioè la struttura formata dall'insieme delle classi resto modulo 4 con l'operazione di addizione definita in precedenza è un gruppo. Infatti: vale la proprietà associativa, si verifica facilmente che: $([1] + [3]) + [2] = [1] + ([3] + [2])$ ed analoghe; l'elemento neutro è $[0]$; l'elemento simmetrico di $[0]$ è $[0]$ stesso, di $[1]$ è $[3]$, di $[2]$ è $[2]$ stesso e di $[3]$ è $[1]$. Inoltre, valendo anche la proprietà commutativa il gruppo è abeliano.

Esempio 3 $(\mathbb{R}, \otimes)$, cioè la struttura formata dalle rotazioni di un quadrato in sé con l'operazione definita in precedenza si verifica facilmente essere un gruppo abeliano.

❖ La regola di cancellazione

Teorema

Dato un gruppo $(G, \circ)$, $\forall x, y, z \in G$ è vero che:

$$z \circ x = z \circ y \Rightarrow x = y \quad \text{e} \quad x \circ z = y \circ z \Rightarrow x = y.$$

Dim.: consideriamo il primo caso: $z \circ x = z \circ y$ e componiamo a sinistra per il simmetrico di z :

$z' \circ (z \circ x) = z' \circ (z \circ y)$ per la proprietà associativa si ha: $(z' \circ z) \circ x = (z' \circ z) \circ y$, per la definizione di simmetrico si ha: $e \circ x = e \circ y$, per la definizione di elemento neutro si ha: $x = y$. C.V.D.. Con analoghe considerazioni si dimostra anche il secondo caso.

➤ LE STRUTTURE ISOMORFE

Definizione

Strutture isomorfe

Due strutture $(X, \circ)$ e $(Y, *)$ si dicono isomorfe se:

- esiste una applicazione biettiva $f : X \rightarrow Y$;
- $\forall x_1, x_2 \in X \Rightarrow f(x_1 \circ x_2) = f(x_1) * f(x_2)$.

Cerchiamo di chiarire questa definizione. Dati le due strutture $(X, \circ)$ e $(Y, *)$ sia $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione biettiva tale che, detti x_1 e x_2 due elementi qualsiasi di X ed $x' = f(x_1)$, $x'' = f(x_2)$ gli elementi di Y che la f associa ad x_1 e x_2 , si ha: $f(x_1 \circ x_2) = x' * x''$, ossia la f fa corrispondere al composto $x_1 \circ x_2 \in X$ il composto $x' * x'' \in Y$ dei corrispondenti.

In termini approssimativi, possiamo allora affermare che le due strutture, pur essendo diversa la natura dei loro elementi e la legge di composizione interna, hanno lo stesso “funzionamento” rispetto a tali leggi di composizione. L'applicazione $f : X \rightarrow Y$ è detta **isomorfismo**.

Esempio 1 Consideriamo l'insieme N dei numeri naturali, l'insieme F delle frazioni con numeratore positivo o nullo e denominatore 1 e l'applicazione $f : N \rightarrow F$ che associa ad ogni numero naturale la frazione di F avente per numeratore il numero stesso. Rispetto alle usuali operazioni di addizione definite in N ed in F , le due strutture $(N, +)$ e $(F, +)$ sono isomorfe. Infatti si ha:

$$\begin{array}{c} 7 + 5 = 12 \\ \updownarrow \\ \frac{7}{1} + \frac{5}{1} = \frac{12}{1} \end{array}$$

Esempio 2 Consideriamo il gruppo $(S, *)$, relativo al robot e il gruppo $(R, \otimes)$ relativo alle rotazioni del quadrato in sé. I loro insiemi sostegno hanno lo stesso numero di elementi, ma come si vede dal seguente esempio le strutture $(S, *)$ e $(R, \otimes)$ **non** sono strutture isomorfe, sostanzialmente le operazioni nelle due strutture hanno comportamento diverso. Nel gruppo $(S, *)$ tutti gli elementi composti con se stessi danno come risultato l'elemento neutro mentre nel gruppo $(R, \otimes)$ ci sono elementi che composti con se stessi non danno l'elemento neutro; questa differenza basta per affermare che le due strutture non sono isomorfe.

➤ GLI ANELLI E I CAMPI

❖ La proprietà distributiva

Data la struttura $(A, \circ, *)$ diciamo che l'operazione $*$ è, rispetto all'operazione $\circ$:

- Distributiva a destra** se $\forall x, y, z \in A \Rightarrow x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z)$;
- Distributiva a sinistra** se $\forall x, y, z \in A \Rightarrow (y \circ z) * x = (y * x) \circ (z * x)$.

Esempio In $(Q^+, +, :)$ la divisione è distributiva a sinistra rispetto all'addizione:

$$(8 + 6) : 2 = 8 : 2 + 6 : 2.$$

Non è invece distributiva a destra:

$$102 : (2 + 3) \neq 102 : 2 + 102 : 3$$

infatti:

$$102 : (2 + 3) = 102 : 5 = 22,4 \text{ mentre } 102 : 2 + 102 : 3 = 51 + 34 = 85.$$

❖ La struttura di anello

Definizione

Anello

Un anello è una struttura algebrica $(A, \circ, *)$ nella quale le operazioni $\circ$ e $*$ godono delle seguenti proprietà:

- $(A, \circ)$ è un gruppo commutativo;
- l'operazione $*$ è associativa;
- l'operazione $*$ è distributiva (a destra e a sinistra) rispetto all'operazione $\circ$:

$$\forall x, y, z \in A \Rightarrow x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z);$$

$$\forall x, y, z \in A \Rightarrow (y \circ z) * x = (y * x) \circ (z * x).$$

Se in $(A, \circ, *)$ l'operazione $*$ gode anche della proprietà commutativa, l'anello si dice **commutativo**.

Se rispetto a $*$ l'insieme A ha l'elemento neutro, l'anello si dice **unitario** o **dotato di unità**.

Osservazione: L'elemento neutro rispetto a $\circ$ viene chiamato **zero** e il simmetrico di un elemento x è detto **opposto** ed è indicato con $-x$.

L'elemento neutro rispetto a $*$ è detto **unità** e il simmetrico di un elemento x è detto **reciproco** (o **inverso** ed è indicato con x^{-1}).

Esempio 1 Verifichi il lettore che $(Z, +, \cdot)$ è un anello commutativo unitario.

Esempio 2 Verifichi il lettore che $(Z_p, +, \cdot)$ è un anello commutativo non unitario (Z_p insieme dei numeri interi pari).

❖ Le proprietà degli anelli

Teorema 1 Assorbimento dello zero

In un anello $(A, +, \cdot)$ è vero che: $\forall x \in A \Rightarrow x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$.

Osservazione: abbiamo utilizzato la notazione additiva e la notazione moltiplicativa per indicare rispettivamente la prima e la seconda operazione dell'anello e con 0 abbiamo indicato l'elemento neutro rispetto alla prima legge, pertanto 0 non è detto che sia il numero zero.

Dim.: consideriamo l'identità $0+0=0$, moltiplichiamo a sinistra ambo i membri per x : $x \cdot (0+0) = x \cdot 0$, applichiamo la proprietà distributiva: $x \cdot 0 + x \cdot 0 = x \cdot 0$, poiché $(A, +)$ è un gruppo, utilizzando la legge di cancellazione si ha: $x \cdot 0 = 0$. C.V.D.. In modo analogo si dimostra che $0 \cdot x = 0$.

Teorema 2 Regola dei segni

In un anello $(A, +, \cdot)$ è vero che: $\forall x, y \in A \Rightarrow \begin{cases} 1. (-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y); \\ 2. (-x) \cdot (-y) = x \cdot y. \end{cases}$

Dim.: dimostriamo la 1. Consideriamo l'identità: $x + (-x) = 0$, moltiplichiamo a destra per y si ha: $[x + (-x)] \cdot y = 0 \cdot y$, applichiamo la proprietà distributiva al primo membro e quella di assorbimento dello zero al secondo: $x \cdot y + (-x) \cdot y = 0$, l'uguaglianza ottenuta dice che $(-x) \cdot y$ è l'opposto di $x \cdot y$, quindi: $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$. C.V.D.. Dimostriamo ora la 2. consideriamo sempre l'identità: $x + (-x) = 0$, e moltiplichiamo a destra per $-y$ ambo i membri: $[x + (-x)] \cdot (-y) = 0 \cdot (-y)$, applichiamo la proprietà distributiva al primo membro e quella di assorbimento dello zero al secondo: $x \cdot (-y) + (-x) \cdot (-y) = 0$, per la precedente regola dei segni si ha: $-(x \cdot y) + (-x) \cdot (-y) = 0$, l'uguaglianza ottenuta dice che $(-x) \cdot (-y)$ è l'opposto di $-(x \cdot y)$, ossia è $x \cdot y$. C.V.D..

❖ La legge di annullamento del prodotto

Nell'usuale aritmetica dei numeri naturale vale la proprietà:

$$\forall x, y \in N \text{ si ha : } x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0.$$

Questa proprietà detta legge di annullamento del prodotto, **non** vale per tutti gli anelli come mostra il seguente esempio.

Esempio Consideriamo $(N_4, +, \times)$. Abbiamo già osservato che $(N_4, +)$ è un gruppo commutativo. Si può anche verificare che $\times$ è associativa ed è distributiva rispetto a $+$. Quindi $(N_4, +, \times)$ è un anello, ma risulta che: $[2] \cdot [2] = [0]$.

Quando degli elementi diversi da zero, moltiplicati fra loro, danno zero si dice che sono **divisori dello zero**.

❖ La struttura di campo

Un campo è una struttura algebrica $(A, \circ, *)$ nella quale le operazioni $\circ$ e $*$ godono delle seguenti proprietà:

- $(A, \circ)$ è un gruppo commutativo;
- $(A, *)$ è un gruppo commutativo, se si esclude da A l'elemento neutro dell'operazione $\circ$;
- l'operazione $*$ è distributiva rispetto all'operazione $\circ$.

Teorema Legge di annullamento del prodotto

In un campo $(A, +, \cdot)$ si ha: $\forall x, y \in A \text{ si ha : } x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$.

Dim.: Viene lasciata per esercizio al lettore.

CAPITOLO 3.3

CONCORSO ORDINARIO 2013

Prova scritta

Quesito 1

Si indichi come la teoria dell'evoluzione abbia modificato i criteri di classificazione del sistema dei viventi e lo stesso concetto di specie. Si discuta come le conoscenze in biologia molecolare possano arricchire e modificare la didattica della moderna sistematica biologica. Quali altri caratteri non morfologici possono fornire elementi per distinguere specie morfologicamente simili?

Quesito 2

Un foglio rettangolare viene diviso in due fogli rettangolari uguali, tagliandolo lungo la retta che passa per i punti medi dei lati più lunghi. Ci si accorge che ciascuno dei due fogli più piccoli così ottenuti è un rettangolo simile a quello da cui si è partiti. Si dica qual è il rapporto tra i due lati del foglio iniziale, spiegandone il ragionamento in termini adatti per una presentazione nella scuola secondaria di primo grado e indicando applicazioni e motivazioni e possibili situazioni di laboratorio. Si dica poi sinteticamente cosa significa che due triangoli sono simili e che due quadrilateri sono simili. Si descriva infine in termini delle coordinate cartesiane una similitudine del piano in sé che mantiene fissa l'origine O degli assi.

Quesito 3

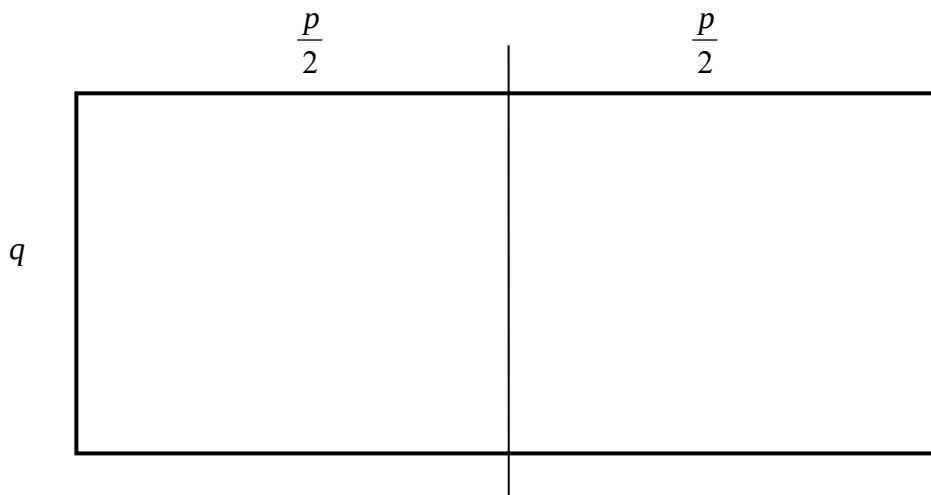
Il metodo del ^{14}C , o Carbonio 14, per la datazione dei reperti fossili si basa sui due fatti seguenti:

- la percentuale dell'isotopo ^{14}C contenuta negli organismi viventi, rispetto al totale del Carbonio contenuto negli organismi stessi, ha un valore costante p_0 , indipendente dall'organismo;
- il Carbonio 14, che è un isotopo radioattivo, decade nel tempo e ha un tempo di dimezzamento d di circa 5.700 anni. Di conseguenza la percentuale di ^{14}C rispetto al totale del Carbonio, che si trova nei resti di un organismo quando è passato un tempo d dopo la morte, è $p_0/2$. Inoltre, se $p(t)$ indica la percentuale di Carbonio 14 quando è passato un tempo t dopo la morte, per ogni valore di t si avrà $p(t+d) = p(t)/2$.
 - Quanto vale $p(3d)$? Quanto vale all'incirca $p(t)$ per $t = 29.000$ anni?
 - Si disegnino due assi cartesiani, mettendo sull'asse orizzontale i tempi da 0 a 50.000 anni e sull'asse verticale le percentuali da zero a 100. Si rappresentino poi sull'asse orizzontale i punti $t_1 = d, t_2 = 2d, \dots, t_6 = 6d$ e si rappresentino nel piano i punti di coordinate $[t_1, p(t_1)]; [t_2, p(t_2)]; \dots; [t_6, p(t_6)]$.
 - Con argomentazioni adattabili per una presentazione nella scuola secondaria di primo grado, anche utilizzando il grafico, si dia una stima del valore t^* in corrispondenza al quale la percentuale $p(t^*)$ è il 70%.
 - Osservando che la percentuale $p(t)$ segue una legge esponenziale del tipo $p(t) = p_0 e^{-ct}$, si esprima la costante c in termini del tempo di dimezzamento d . Grazie a questo si dia una formula per il valore t^* di cui al punto precedente.

Ci occuperemo in questo capitolo solo della risoluzione dei quesiti 2 e 3.

Risoluzione quesito 2

Siano p e q le misure dei lati del rettangolo, con $p > q$. Rappresentiamo quindi la pagina rettangolare di cui nel testo:



Tagliamo lungo la retta che passa per i punti medi del lato più lungo. Per i dati del problema deve valere la proporzione:

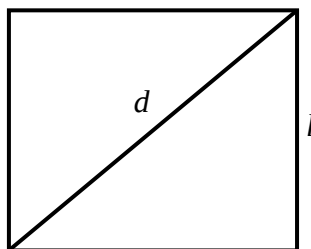
$$p : q = q : \frac{p}{2}.$$

Pertanto da questa proporzione possiamo ricavare il rapporto richiesto dal testo:

$$q^2 = p \cdot \frac{p}{2} \Rightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow \frac{p}{q} = \sqrt{2}.$$

Dunque il rapporto richiesto vale $\sqrt{2}$. Cerchiamo ora di vedere come si possa costruire un rettangolo con queste caratteristiche.

Disegniamo un quadrato e la relativa diagonale:



Evidentemente il rettangolo che ha come base e altezza rispettivamente la diagonale ed il lato del quadrato ha le caratteristiche richieste. Infatti, come è noto, si ha: $d = l\sqrt{2}$ e dunque: $\frac{d}{l} = \sqrt{2}$.

Una proposta didattica a livello di scuola secondaria di primo grado può essere quella di invitare gli studenti a:

- disegnare un rettangolo che ha come base e altezza rispettivamente la diagonale ed il lato di un quadrato;
- misurare i lati p e q ;
- calcolare, con l'ausilio di una calcolatrice, il rapporto $\frac{p}{q}$;
- dividere il rettangolo con una retta passante per i punti medi del lato maggiore;
- calcolare il rapporto tra il lato maggiore e quello minore di uno dei due rettangoli ottenuti;
- osservare che i due rapporti ottenuti sono uguali (o quasi, infatti è improbabile ottenere rapporti esattamente uguali);
- considerare che il valore di tale rapporto è molto vicino al valore di $\sqrt{2}$.

Si può anche condurre gli alunni ad una concettualizzazione più astratta della questione, ponendo loro la seguente domanda: “Se i due rettangoli sono simili, cioè quei due rapporti sono uguali, allora è sempre vero che il loro comune valore è $\sqrt{2}$?”

Agli allievi si può far osservare che una realizzazione pratica di tale rettangolo è il foglio A4, il cui formato soddisfa le richieste del problema; in tal modo questo rettangolo esce dall'ambito della Geometria pura, per diventare il modello matematico di un oggetto della vita quotidiana che ritroviamo ogni volta che usiamo una stampante oppure una fotocopiatrice, rendendo più “commestibile” $\sqrt{2}$. Tale è, infatti, il rapporto tra i lati del rettangolo in oggetto (ente matematico) e del foglio A4, che di tale rettangolo è una particolare realizzazione.

Far lavorare gli allievi su un foglio A4, serve a motivare meglio gli alunni e li spinge a comprendere che la Matematica è intorno a noi, anche negli oggetti più semplici della vita quotidiana.

È interessante domandarsi, anche, se il rettangolo metà di quello di partenza verifica la stessa

proprietà, cioè se i suoi lati q e $\frac{p}{2}$ sono nello stesso rapporto dei lati del rettangolo di lati $\frac{q}{2}$ e $\frac{p}{2}$.

E tutti gli altri rettangoli che si otterrebbero reiterando il procedimento?

Passiamo ora al secondo punto.

Due quadrilateri sono simili se hanno:

- gli angoli ordinatamente congruenti;
- i lati omologhi in proporzione.

Questa definizione è sovrabbondante nel caso dei triangoli; infatti, per i triangoli, le due proprietà non sono indipendenti, poiché l'esistenza dell'una comporta l'esistenza dell'altra.

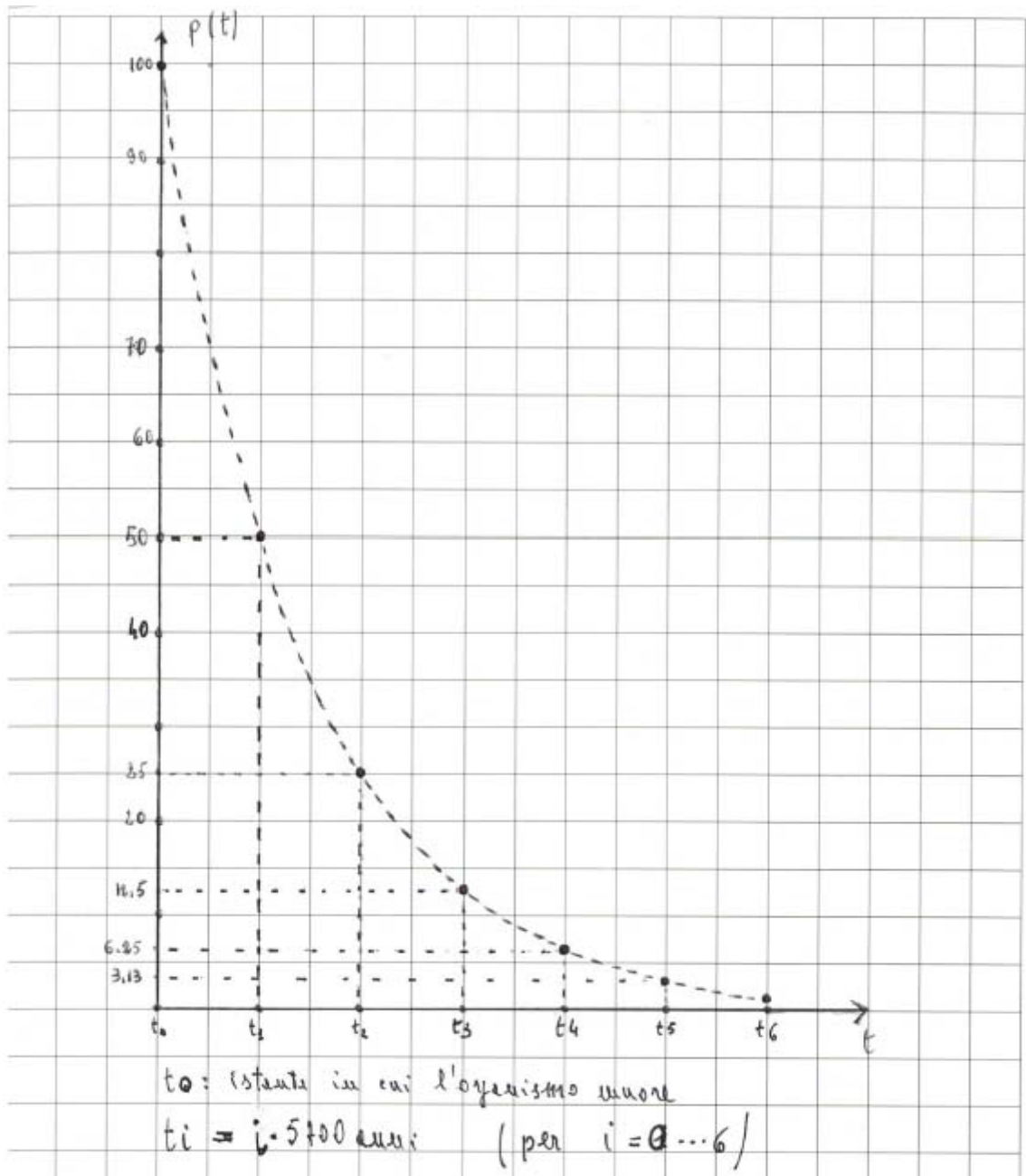
Per quanto riguarda il terzo punto si rimanda il lettore al capito 3.1 dove sono state trattate in modo sistematico le trasformazioni geometriche.

Risoluzione quesito 2

Per il significato di d risulta: $p(3d) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 p_0$, ancora, 29.000 anni corrispondono a:

$$\frac{29.000}{5.700} = 5,1 \text{ tempi di dimezzamento. Dunque abbiamo: } p(29.000) = \left(\frac{1}{2}\right)^{5,1} p_0 \cong 0,03 p_0.$$

Per quanto riguarda il punto 2 si ha il seguente grafico:



Una proposta didattica a livello di scuola secondaria di primo grado può essere quella di indicare con 1 un tempo di dimezzamento cioè il numero di anni, nel caso in esame 5.700, alla fine dei quali la percentuale di C 14 diventa la metà di quella iniziale, con 2 due tempi di dimezzamento e così via, si costruisce una tabella come la seguente che mette in relazione i tempi di dimezzamento e la percentuale di C 14 corrispondente presente nell'organismo.

t	$p(t)$
0	100
1	50
2	25
3	12,5
....	

La percentuale quindi diminuisce secondo le potenze di $\frac{1}{2}$. Dunque, la relazione che descrive il fenomeno è: $p = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$, dove t è il numero dei tempi di dimezzamento e p è la percentuale di C 14 corrispondente.

Si riportano in un sistema di assi cartesiani i tempi di dimezzamento in ascissa e le percentuali in ordinata ottenendo una serie di punti. Si dovrà far riflettere gli allievi sul fatto che la diminuzione del carbonio non avviene improvvisamente alla fine di ogni tempo di dimezzamento, ma avviene con continuità. Questa osservazione consentirà di unire i punti del piano cartesiano con una curva il cui andamento è suggerito dalla disposizione stessa dei punti e che sarà quella disegnata nella pagina precedente. Questa curva permette anche di vedere in quale momento la percentuale di C 14 presente nell'organismo sarà uguale al 70%. Questa percentuale letta in ordinata corrisponde ad una ascissa che rappresenta, come si legge nel grafico, circa la metà di un tempo di dimezzamento.

Per quanto riguarda il quarto punto osserviamo che la curva di equazione $p(t) = p_0 e^{-ct}$ deve passare per il punto $\left(d, \frac{1}{2} p_0\right)$ e pertanto deve essere:

$$\frac{1}{2} p_0 = p_0 e^{-cd} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-cd} \Rightarrow -cd = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow -cd = -0,69 \Rightarrow c = \frac{0,69}{d}.$$

Pertanto la formula che risolve il punto 3 è: $0,70 = e^{-\frac{0,69}{d}t}$, quindi si ha:

$$-\left(\frac{0,69}{d}\right)t = \ln 0,7 \Rightarrow t = \frac{0,36}{0,69}d \Rightarrow t = 0,52 \cdot 5.700 = 2.945 \text{ anni}.$$

Si conclude che 2.945 anni dopo la morte dell'organismo la percentuale di carbonio si è ridotta del 30%. L'espressione analitica di $p(t)$ è del tipo: $p(t) = p_0 e^{-ct}$ la dove:

$$p(t) = p_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{d}} = p_0 e^{\frac{t}{d} \ln \frac{1}{2}} = p_0 e^{-0,69 \frac{t}{d}} = p_0 e^{-ct},$$

dove si è posto $c = \frac{0,69}{d}$.

Questionario 3

1. La derivata della funzione $f(x) = \sqrt{\ln(x^2 + 9)}$ è:
 - a. $f'(x) = \frac{x}{(x^2 + 9)\sqrt{\ln(x^2 + 9)}}$;
 - b. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln(x^2 + 9)}}$;
 - c. $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{\ln(x^2 + 9)}}$.

2. Una primitiva di $f(x) = \operatorname{tg} x$ è:
 - a. $F(x) = \ln|\cos x|$;
 - b. $F(x) = -\ln|\cos x|$;
 - c. $F(x) = \cos(\ln|x|)$.

3. Le soluzioni della disequazione $\frac{x(2 - \sqrt{4x^2 + 1})}{\sqrt{4x^2 + 1}\sqrt{\sqrt{4x^2 + 1} - (x^2 + 1)}} < 0$ sono:
 - a. $-\frac{\sqrt{3}}{2} < x < \frac{\sqrt{3}}{2}$;
 - b. $-\frac{\sqrt{3}}{2} < x < 0 \vee x > \frac{\sqrt{3}}{2}$;
 - c. $x < -\frac{\sqrt{3}}{2} \vee x > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. Nello studio delle funzioni, il segno della derivata prima serve a:
 - a. Trovare gli eventuali punti di flesso;
 - b. trovare gli eventuali punti di massimo e minimo relativi;
 - c. trovare il dominio.

5. Nello studio delle funzioni, il segno della derivata seconda serve a:
 - a. Trovare gli eventuali punti di flesso;
 - b. trovare gli eventuali punti di massimo e minimo relativi;
 - c. trovare il dominio.

6. Due strutture $(X, \circ)$ e $(Y, *)$ si dicono isomorfe se:
 - a. Esiste una applicazione biettiva $f : X \rightarrow Y$ e $\forall x_1, x_2 \in X$ si ha:
 $f(x_1 \circ x_2) = f(x_1) * f(x_2)$;
 - b. esiste una applicazione iniettiva $f : X \rightarrow Y$ e $\forall x_1, x_2 \in X$ si ha:
 $f(x_1 \circ x_2) = f(x_1) * f(x_2)$;
 - c. esiste una applicazione suriettiva $f : X \rightarrow Y$ e $\forall x_1, x_2 \in X$ si ha:
 $f(x_1 \circ x_2) = f(x_1) * f(x_2)$.

7. Le equazioni $\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$ con $\Delta = ab' - a'b \neq 0$ sono di:

- a. Una simmetria assiale;
- b. una affinità;
- c. una simmetria centrale.

8. Una **glissosimmetria** è:

- a. La composizione di una traslazione con una simmetria assiale;
- b. la composizione di una traslazione con una simmetria;
- c. la composizione di due simmetrie centrali.

9. Un gruppo è:

- a. Una struttura algebrica $(G, \circ)$ nella quale l'operazione $\circ$ gode delle proprietà associative, esiste ed appartiene a G l'elemento neutro e per ogni elemento x di G esiste in G l'elemento simmetrico x' ;
- b. una struttura algebrica $(G, \circ)$ nella quale l'operazione $\circ$ gode delle proprietà associative ed esiste ed appartiene a G l'elemento;
- c. una struttura algebrica $(G, \circ)$ nella quale l'operazione $\circ$ gode delle proprietà commutativa, esiste ed appartiene a G l'elemento neutro e per ogni elemento x di G esiste in G l'elemento simmetrico x' .

10. Un campo è:

- a. Una struttura algebrica $(A, \circ, *)$ nella quale l'operazione $\circ$ e $*$ godono delle seguenti proprietà: $(A, \circ)$ è un gruppo commutativo; l'operazione $*$ è associativa; l'operazione $*$ è distributiva (a destra e a sinistra) rispetto all'operazione $\circ$;
- b. una struttura algebrica $(A, \circ, *)$ nella quale le operazioni $\circ$ e $*$ godono delle seguenti proprietà: $(A, \circ)$ è un gruppo commutativo; $(A, *)$ è un gruppo commutativo se si esclude da A l'elemento neutro dell'operazione $\circ$; l'operazione $*$ è distributiva rispetto all'operazione $\circ$;
- c. una struttura algebrica $(A, \circ, *)$ nella quale l'operazione $\circ$ e $*$ godono delle seguenti proprietà: $(A, \circ)$ è un gruppo commutativo; l'operazione $*$ è associativa e commutativa; l'operazione $*$ è distributiva (a destra e a sinistra) rispetto all'operazione $\circ$.

UNITA' DIDATTICA 4: TEMI SVOLTI DI SCIENZE

CAPITOLO 4.1 Tema 1 - Ambiente

Il candidato delinea un percorso didattico di educazione ambientale e si soffermi su un argomento che ritiene particolarmente urgente; indichi la classe o le classi a cui è rivolta l'attività, gli strumenti e le finalità proposte.

La finalità della scuola media inferiore, **scuola secondaria di primo grado**, è quella di contribuire a formare cittadini responsabili, autonomi ed in grado di effettuare scelte meditate e razionali, pertanto la tematica proposta risulta di fondamentale importanza e di pregnante attualità. I continui disastri ambientali che riguardano tutti gli ambienti, terrestri, marini, montani, atmosferici, lo sfruttamento selvaggio delle risorse naturali in ogni parte del globo, impongono un ripensamento del concetto di sviluppo mondiale. Sembra che le istituzioni degli stati più progrediti abbiano, preso coscienza della grave situazione e i diversi protocolli, come quello di Kyoto, testimoniano tale sensibilità, tuttavia gli impegni presi da parte di molte nazioni vengono disattesi per ragioni soprattutto di tipo economico. D'altra parte è difficile chiedere ai paesi in via di sviluppo di non comportarsi come la vecchia Europa, che a partire dal diciottesimo secolo non ha fatto altro che deforestare, costruire industrie altamente inquinanti, impoverire il suolo, sfruttare le risorse globali in modo spesso dissennato. Tuttavia si è giunti ad un punto estremamente critico come dimostrano le decisioni di alcuni paesi che non avevano sottoscritto protocolli ambientali precedenti come gli Stati Uniti o la Cina. Finalmente da alcuni anni si vanno affermando, per fortuna non solo nella vecchia Europa, concetti molto importanti come quello di **sviluppo sostenibile**, forse l'idea più innovativa, ma a mio parere da delineare con maggiore precisione, sostanzialmente occorre rendersi conto che un cambio di mentalità si impone nello sfruttamento delle risorse naturali e ciò presuppone un cambio di mentalità nell'organizzazione del lavoro, nel rispetto della natura in tutte le sue forme, nel prospettare un nuovo modello di comportamenti individuali soprattutto per quanto riguarda il consumo. Si comprende quindi, come tali mutamenti di mentalità risultino enormemente difficili in quanto cambiare abitudini consolidate, direi cattive abitudini, è molto complicato e si rivela necessario un mutamento di tipo culturale. Tale cambiamento non può che iniziare dalla scuola dell'obbligo per proseguire dopo con l'istruzione secondaria e continuare ancora per tutta la vita in una sorta di educazione continua e questa permetterà di effettuare scelte individuali più consapevoli in relazione alle tematiche ambientali. Da quanto detto si deduce che il tema debba essere affrontato e svolto in un'ottica interdisciplinare, coinvolgendo quasi tutti i docenti, in particolare l'insegnante di italiano, storia, educazione civica, geografia e quello di educazione tecnica. Naturalmente il lavoro del docente di scienze si incentrerà sugli aspetti scientifici senza comunque trascurare le implicazioni di tipo sociale. Particolarmente importanti si rivelano per l'efficacia dell'intervento i rapporti con gli enti che si occupano di tematiche ambientali come il WWF, Parchi Naturali ecc. In genere tali associazioni mostrano molta disponibilità ad una stretta collaborazione con le scuole e mettono a disposizione delle scuole le loro conoscenze e competenze. Ad esempio le visite guidate ad ambienti e parchi si rivelano molto coinvolgenti per gli allievi, che ritornano con un patrimonio di esperienze sul campo veramente indimenticabili e fanno ben sperare per il futuro. Gli studenti devono comprendere che acquisire una coscienza ambientale non significa opporsi allo sviluppo economico o scientifico, ma, al contrario armonizzare il miglioramento del progresso con la salvaguardia dell'ambiente, ovvero ricercare metodologie per conseguire tale obiettivo. In sintesi le finalità educative del progetto si possono così sintetizzare:

- Comprendere che il mondo è un sistema complesso le cui parti interagiscono in modo costante ed ogni comportamento incide sul sistema
- Riconoscere il grande valore delle forme in cui si manifesta la natura, quindi valorizzare tutti i tipi di ambienti e la loro biodiversità
- Valorizzare anche i diversi ambienti umani e quindi le diversità di tipo culturale
- Comprendere il valore del paesaggio, al fine di salvaguardarlo anche per uno sviluppo turistico del territorio
- Prendere coscienza che i comportamenti individuali, anche quelli quotidiani, hanno delle conseguenze sul presente ed anche sul futuro
- Realizzare buone pratiche quotidiane relativamente all'ambiente in cui si vive
- Sviluppare il senso di responsabilità individuale collettivo
- Favorire comportamenti che sviluppino l'autonomia personale
- Favorire comportamenti che sviluppino il senso di solidarietà umana
- Favorire atteggiamenti che sviluppino l'accoglienza

L'attività è rivolta a tutte le tre classi e viene articolata su argomenti che verranno svolti attraverso approfondimenti successivi. Nella prima classe l'attività riguarderà essenzialmente lo studio dell'ambiente naturale e del territorio, nella seconda media si potrà scegliere ad esempio di trattare la problematica dei rifiuti e il loro riciclo, in particolare bisognerà fare in modo di concepire i rifiuti non solo come un problema, ma come una risorsa, nella terza classe, quando gli studenti, sono sicuramente più maturi, si potrà affrontare il tema della sostenibilità, che coinvolge le problematiche relative all'energia. In dettaglio i **contenuti** si possono così articolare:

Prima classe

- L'ambiente naturale (concetto di ecosistema, popolazione, habitat, comunità biologica, fattori biotici e abiotici, nicchia ecologica interazione tra i viventi, catene reti alimentari, biodiversità, importanza della biodiversità)
- L'ambiente antropizzato (intervento dell'uomo sull'ambiente e sue conseguenze, l'agricoltura, la pastorizia, l'urbanizzazione)
- I parchi, le riserve naturali e i principali enti ed associazioni ambientaliste
- Analisi dell'alterazione dell'ecosistema e sue conseguenze
- Conoscenza dell'ambiente naturale in cui si vive

Seconda classe

- I rifiuti: come si producono e come si smaltiscono (materiali biodegradabili e no)
- Il rifiuto inteso come risorsa (materiali riciclabili, raccolta differenziata)
- L'agricoltura biologica e biodinamica, le sostanze nocive nella coltivazione
- Gli OGM: cosa sono e le problematiche ad essi connessi
- L'utilizzo dei materiali riciclati nell'arte e nell'artigianato

Terza classe

- Il concetto di lavoro meccanico e di energia
- Le varie forme di energia e la sua trasformazioni con particolare riferimento alle energie alternative (eolica, solare
- L'impatto dell'utilizzo delle diverse fonti di energia
- Il concetto di sviluppo sostenibile
- Il problema energetico
- Le politiche ambientali europee e nel mondo ed il protocollo di Kyoto

Per quanto riguarda gli obiettivi più strettamente didattici, si possono sintetizzare come segue:

- Imparare ad osservare i diversi ambienti e vederne le trasformazioni per poter intervenire positivamente
- Saper confrontare i diversi ambienti naturali
- Conoscere in modo approfondito il proprio territorio e le sue diversità
- Conoscere le riserve naturali, gli enti e le associazioni ambientaliste con particolare riferimento al proprio territorio
- Acquisire il concetto di biodegradabilità, dei materiali riciclabili e della raccolta differenziata
- Acquisire il concetto che le risorse del pianeta terra non sono inesauribili, ma al contrario sono limitate
- Conoscere le principali sostanze chimiche nocive utilizzate in agricoltura e i metodi biologici per combattere il parassitismo
- Conoscere gli organismi OGM (organismi geneticamente modificati) e le questioni ad essi relativi
- Conoscere le cause dell'alterazione dei diversi ambienti, con particolare riferimento al proprio territorio
- Acquisire il concetto di impatto ambientale
- Conoscere le principali normative europee riguardanti la tutela dell'ambiente

Non si sono distinti i diversi obiettivi didattici per anni scolastici perché si ritiene che il processo di educazione alla tutela dell'ambiente sia continuo, in linea di massima, tuttavia, l'ordine di elencazione può scandire i tempi. Una particolare attenzione va riservata però alla metodologia, agli strumenti e ai partecipanti all'attività, senza abbandonare il libro di testo, soprattutto nella prima classe, in cui la guida alla lettura è ancora di fondamentale importanza, verrà privilegiata una partecipazione attiva e personale di ogni allievo o gruppi di allievi, nell'ottica che fare è meglio di ascoltare, tra l'altro uno degli obiettivi formativi è quello di acquisire una cultura scientifica e far acquisire un metodo razionale di studio. Pertanto si prevedono visite guidate, non solo a parchi e riserve naturali, ma anche **semplici passeggiate nel proprio territorio**, nella proprio paese o nel quartiere della propria città, mentre nei parchi e nelle riserve si è in genere accompagnati da esperti che offrono con grande competenza e passione la loro collaborazione, illustrando le caratteristiche degli ambienti, nelle camminate a piedi si impara non solo a guardare, spesso distrattamente il luogo in cui si vive, ma al contrario a vederlo, quindi conoscerlo e dopo amarlo. Infatti per apprezzare ed amare il luogo in cui si vive occorre preliminarmente conoscerlo, purtroppo quanti sono ai nostri giorni i ragazzi che conoscono il posto in cui vivono? Spesso sono accompagnati a scuola o in palestra con l'automobile e camminano veramente poco, sarebbe opportuno che si iniziasse ad andare a scuola a piedi come suggeriscono i comportamenti dei paesi nordici. Durante queste attività gli allievi osservano, prendono nota di fatti importanti, discutono, fanno domande e

avanzano proposte, a casa riassumono, fanno schemi, propongono idee, lavorano anche in gruppi, in altre parole partecipano in maniera attiva ed imparano molto meglio di un ascolto non sempre attivo. Un altro punto essenziale riguarda l'aspetto sperimentale e di laboratorio, ad esempio nella prima classe quando si tratta l'interazione tra gli organismi con l'ambiente si possono proporre esperimenti come i seguenti:

Fattore abiotico dell'acqua

Materiale occorrente :

- Una qualsiasi piantina
- Un grande imbuto
- Un termometro da reperire nei vivai o nei negozi di ferramenta
- Un cucchiaino, una spatola, un foglio di carta ed una matita per raccogliere ed elaborare dati

Conduzione dell'esperimento

- Si mette l'imbuto sul contenitore graduato per poter produrre un pluviometro cioè un misuratore di pioggia
- Si pone il pluviometro, quando sta piovendo, nei pressi della pianta e si misura ad esempio per una settimana la quantità di pioggia che vi penetra
- Si tiene conto dell'evaporazione del liquido durante la giornata, in modo da evitare di rilevare dati non precisi ed ogni mattina si annota il volume d'acqua contenuto nel recipiente e poi si svuota

Fattore abiotico temperatura

Conduzione dell'esperienza

- Si misura la temperatura vicino alla pianta ogni quattro ore, ad esempio alle 7, alle 11, alle 15, alle 17
- Si annota ogni mattina la temperatura massima e quella minima del giorno precedente per una settimana
- Si calcola l'escursione termica, ovvero la differenza tra il valore massimo e quello minimo

Fattori abiotici luce e suolo

Conduzione dell'esperienza

- Si annota alle ore già indicate se la pianta è all'ombra o è esposta alla luce, se il cielo è limpido o coperto di nuvole
- Si osserva il terreno su cui cresce la pianta e si registrano eventuali resti organici (foglie secche, corteccia, rami, insetti morti)
- Con una spatola si taglia il terreno a fettine e si osserva il suo aspetto man mano che si va più giù
- Nel caso in cui gli strati di terreno sono diversi, si registrano le variazioni

Dalla tabella dei dati raccolta si potranno conoscere :

- La quantità d'acqua piovana assorbita
- Le temperature a cui è soggetta la piantina e le escursioni termiche che la pianta è riuscita a sopportare
- Le caratteristiche del suolo (argilloso, sabbioso...)
- I tempi in cui l'organismo è esposto al sole e all'ombra

CAPITOLO 4.2 Tema 2 – Calore e Temperatura

Il candidato delinea un percorso didattico sul calore e la temperatura, anche sotto forma di unità didattica, soffermandosi su argomenti che ritiene particolarmente urgente; indichi la classe o le classi a cui è rivolta l'attività, gli strumenti e le finalità proposte.

Unità Didattica

Giustificazione:

Questa unità didattica, rientra negli obiettivi di apprendimento specifici di scienza per la prima classe della scuola secondaria di primo grado. Il periodo dell'anno in cui si svolgerà sarà subito dopo l'inizio del primo quadrimestre. Si prefigge di far conoscere e comprendere ai ragazzi la terminologia, i concetti, i fenomeni, i metodi e le leggi riguardanti la temperatura, il calore e la sua propagazione.

Prerequisiti:

- semplici conoscenze sulla struttura della materia
- concetto di misura
- concetto di energia
- conoscere il concetto di densità
- riconoscere quali sono i corpi che producono calore

Obiettivi:

- distinguere il concetto di calore da quello di temperatura
- riconoscere il calore come forma di energia
- riconoscere nella dilatazione termica un effetto del calore
- sapere come è costruito un termometro e saperlo utilizzare
- riconoscere nella vita quotidiana esempi delle diverse modalità di propagazione del calore
- distinguere le sostanze isolanti da quelle che conducono il calore
- riferire con un linguaggio appropriato alcune esperienze sull'argomento

Contenuti:

- il calore e la sua unità di misura
- la propagazione del calore
- la temperatura e una delle sue unità di misura
- il termometro
- gli effetti del calore: la dilatazione termica
- isolanti e conduttori termici

Strumenti:

- lezione frontale
- attività individuale e di gruppo
- esperienze guidate seguite da riflessione
- laboratorio povero e quotidiano
- utilizzo del libro di testo
- computer

Spazi: aula e laboratorio

Tempo: 7/9 h

- 3h di lezione frontale e partecipata
- 2h di laboratorio
- 1h di verifica in itinere
- 1h per verifica di fine unità didattica
- 1h di eventuale attività di recupero, se necessaria
- 1h di verifica di fine recupero, se necessaria

Metodologia:

L'approccio all'argomento sarà provocatorio, al fine di suscitare interesse negli alunni e consisterà nella lettura di un brano che parli del *flogisto*, sostanza immaginaria assunta un tempo a modello per spiegare il trasferimento di calore.

Con una attività di brainstorming si rileveranno preconoscenze ed eventuali stereotipi.

Si darà poi il via alle numerose attività di laboratorio, costruite e pensate, nell'ordine, per consentire ai ragazzi, di avvicinarsi all'argomento, formulare ipotesi, verificare le relazioni tra le grandezze prese in considerazione.

Durante le attività sperimentali, i ragazzi annoteranno dati e osservazioni, per poter poi redigere ogni volta una relazione che conduca alla spiegazione dei fenomeni osservati.

a) C'è differenza tra calore e temperatura?

- Attività proposta:
- 1) Due pentole contenenti quantità di acqua differenti, sottoposte a riscaldamento (fiamme a uguale intensità) raggiungono l'ebollizione in tempi diversi.
 - 1bis) Scaldando le quantità d'acqua di cui sopra per tempi uguali percepisco al tatto, toccando l'acqua, sensazioni diverse.

Nel ripensamento dei risultati ottenuti concludiamo che il calore e la temperatura sono collegabili, ma non coincidono; viene qui introdotto il concetto di caloria come unità di misura del calore.

b) Cos'è il calore, allora?

Attività proposta (individuale, da svolgere a casa):

- 2) Una pentola coperta, piena d'acqua, su un fornello acceso, giunta ad ebollizione produce il movimento del coperchio.

Le relazioni dei ragazzi verranno lette e commentate in classe: l'insegnante guiderà gli alunni a riconoscere nel calore una forma di energia (quella che solleva il coperchio).

c) Se il calore produce riscaldamento, lo fa sempre nello stesso modo?

- Attività proposta:
- 3) Un cucchiaino di legno, uno di acciaio e uno d'argento in un bicchiere di acqua calda si riscaldano in misura diversa.
 - 3bis) Riconsiderazione di 1bis).

Dovrebbe così farsi più evidente agli alunni il legame tra calore e temperatura: riconosceranno, con un po' di aiuto, che l'uno determina la variazione dell'altra, in relazione alla quantità di materia e al tipo di materia.

d) Ricerchiamo come l'uomo e la natura sfruttano la diversa capacità di condurre calore propria di sostanze diverse.

L'insegnante guida una discussione in classe, fornisce ai ragazzi alcuni esempi di isolanti termici prodotti dal regno animale (lana, grasso, pelliccia...) e li conduce all'esigenza di classificare. Qui si prospetta la possibilità di una collaborazione interdisciplinare con l'insegnante di educazione tecnica per lo studio delle modalità utilizzate dall'uomo per ottenere l'isolamento termico, per esempio nell'edilizia.

e) Quali effetti produce il calore?

Attività proposta: 4) SOLIDI : utilizziamo l'anello di Gravesande: una sfera di metallo una volta riscaldata non passa più attraverso l'anello che a temperatura ambiente attraversava.

LIQUIDI: una beuta riempita d'acqua colorata, chiusa da un tappo attraversato da un tubicino di vetro viene sottoposta a riscaldamento: l'acqua sale lungo il tubicino.

GAS: una beuta "vuota", capovolta sulla superficie dell'acqua di una bacinella, riscaldata alla base produce la formazione di bolle.

Lasciamo ai ragazzi la formulazione di alcune ipotesi che possano giustificare gli avvenuti aumenti di volume, li conduciamo gradualmente a considerare l'energia che, sotto forma di calore, fa aumentare il movimento delle "particelle" che costituiscono i nostri oggetti di esperimento...aumenteranno anche gli spazi fra una particella e l'altra: alla fine diamo un nome al fenomeno: è la dilatazione.

f) Come si "muove" il calore?

Parliamo in questo caso ai ragazzi della conduzione, della convezione e dell'irraggiamento, utilizzando la lezione frontale, invitandoli a svolgere individualmente, a casa una ricerca sui significati di questi termini utilizzando il libro di testo o altre fonti; svolgeremo poi in classe la verifica sperimentale di quanto appreso:

Attività proposte: 5) SOLIDI: un ferro da calza riscaldata ad una estremità lascia cadere, in ordine dalla più vicina alla più lontana dalla fonte di calore, alcune palline di cera che ad esso erano state inizialmente fatte aderire.

LIQUIDI: acqua contenente segatura, riscaldata, evidenzia le correnti convettive.

VUOTO: il vetro di una lampadina accesa si riscalda.

g) Viene spiegato dall'insegnante come un effetto del calore ormai noto agli alunni, la dilatazione di un liquido, venga utilizzato per misurare la temperatura; si potranno insieme cercare notizie sulla scala Celsius e su altre scale termometriche. Questa volta i ragazzi **dovranno** costruire un termometro (esistono in commercio le strutture già pronte, prive della taratura):

contrassegneranno il punto di fusione e di ebollizione dell'acqua e assegneranno i valori 0° e 100° rispettivamente. Potranno poi suddividere l'intervallo in 10 parti uguali e accingersi a valutare la precisione del loro strumento confrontandolo con un termometro comune.

Verifica e valutazione

La verifica verterà essenzialmente su:

- capacità di ricordare le nozioni trattate
- capacità di usare tutti i concetti entro il contesto in cui sono stati appresi
- capacità di applicare fatti e concetti in situazioni nuove
- capacità di analizzare dati e darne giudizi tenendo conto delle abilità acquisite in rapporto alle capacità dimostrate e alle finalità programmate.

Consisterà in: interrogazione orale, verifiche quotidiane con esercizi graduati, prove oggettive e soggettive, strutturate e semistrutturate, test e questionari.

CAPITOLO 4.3 Tema 3 – Sistema periodico e proprietà periodiche

Il candidato presenti il sistema periodico e le proprietà periodiche, sotto forma di un capitolo di libro di testo.

➤ Massa atomica o numero atomico? Una nuova legge periodica

❖ La legge periodica di Mendeleev

La **legge periodica** che Mendeleev aveva proposto classificava gli elementi chimici secondo valori crescenti della massa atomica relativa (all'epoca chiamata "peso atomico").

In base a questo criterio il chimico russo avrebbe dovuto porre i componenti di alcune coppie di elementi in ordine invertito rispetto a quello suggerito dal ricorrere delle proprietà chimiche. Precisamente, il nichel, avendo massa atomica relativa leggermente maggiore del cobalto, avrebbe dovuto precedere il tellurio.

Mendeleev fece allora prevalere il criterio ispirato alla periodicità delle proprietà chimiche: dispose il cobalto davanti al nichel e il tellurio davanti allo iodio.

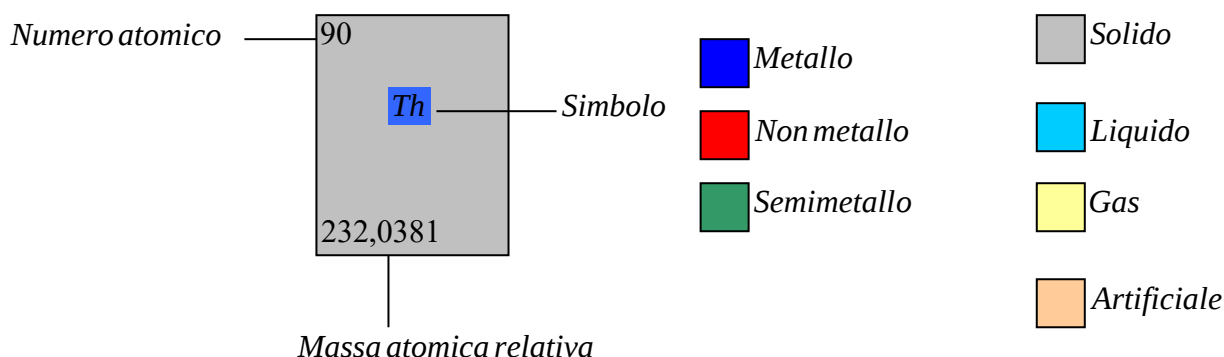
❖ Qual è il migliore criterio di classificazione?

Il problema si risolve nel 1914, dopo la morte di Mendeleev, quando il fisico inglese Henry Moseley scoprì che, se si ordinavano gli elementi in base alla carica nucleare anziché alla massa atomica, si risolvevano tutte le incongruenze riscontrate da Mendeleev. Infatti, ordinare gli elementi in base alla loro massa atomica non è un criterio totalmente affidabile, perché la massa atomica dipende dal numero di neutroni, che è diverso nei vari isotopi.

Henry Moseley, chiamò **numero atomico** il valore della carica nucleare di un elemento, che corrisponde al numero di protoni del nucleo, e formulò una nuova legge periodica.

La **legge periodica** afferma che gli elementi possiedono proprietà chimiche e fisiche che variano periodicamente al crescere del numero atomico.

Per questo motivo, nella tavola periodica (TP), o **sistema periodico**, gli elementi sono ordinati per numero atomico crescente.



➤ Tavola periodica e configurazioni elettroniche

Il sistema periodico nasconde un segreto: le configurazioni elettroniche di tutti gli elementi. È questa una caratteristica importante, perché, come oggi sappiamo, le proprietà chimiche degli elementi dipendono proprio da come sono distribuiti gli elettroni intorno al nucleo.

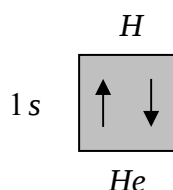
❖ I periodi

I periodi della tavola periodica degli elementi sono sette e corrispondono ai primi sette livelli energetici degli atomi, ovvero ai valori compresi tra 1 e 7 del numero quantico principale n .

Nello stato fondamentale (non eccitato), gli atomi di elementi appartengono a uno stesso periodo hanno infatti i loro elettroni più esterni nel medesimo livello: sette livelli sono sufficienti a ospitare tutti gli elettroni anche dell'ultimo elemento, quello con numero atomico più elevato.

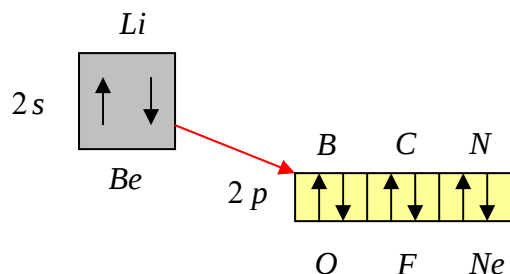
• Primo periodo

Comprende solo due elementi, l'idrogeno e l'elio, perché il livello energetico con $n = 1$ possiede solo il sottolivello s , che si riempie con due elettroni. Di conseguenza nella prima colonna è posizionato l'idrogeno, che ha $Z = 1$ e configurazione elettronica $1s^1$; nell'ultima colonna (che corrisponde al livello pieno) si trova l'elio, con $Z = 2$ e configurazione elettronica $1s^2$.



• Secondo periodo

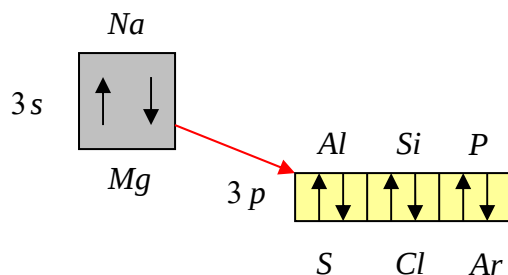
Con gli elementi di questo periodo si riempie il secondo livello energetico ($n = 2$), comprende due sottolivelli, s e p , che contengono al massimo 2 e 6 elettroni rispettivamente. Perciò tali elementi sono in totale 8, con Z da 3 a 10. Il secondo periodo inizia con il litio che ha $Z = 3$ e configurazione elettronica $1s^2 2s^1$, e termina con il neon, che ha $Z = 10$ e configurazione elettronica $1s^2 2s^2 2p^6$.



• Terzo periodo

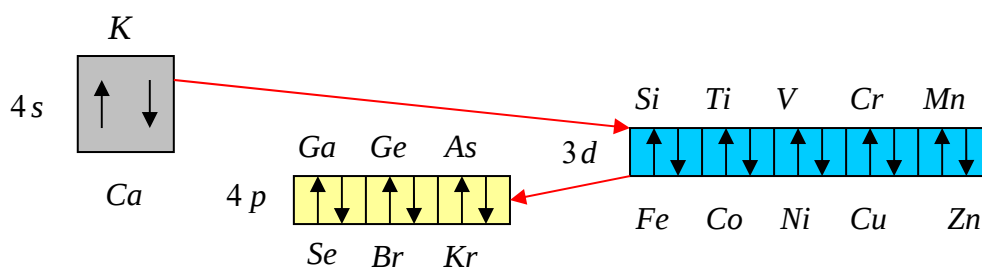
Il livello con $n = 3$ comprende tre sottolivelli s , p e d , che contengono al massimo 2, 6 e 10 elettroni rispettivamente. Nella costruzione della moderna TP, però, si tiene conto dell'ordine di riempimento degli orbitali in base alla loro energia: poiché l'orbitale $4s$ si riempie prima del $3d$, il terzo periodo contiene solo otto elementi. Sono gli elementi con Z da 11 a 18, i cui elettroni più

esterni occupano gli orbitali $3s$ e $3p$: il primo è il sodio ($Z = 11$, $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$) e l'ultimo l'argo ($Z = 18$, $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$).



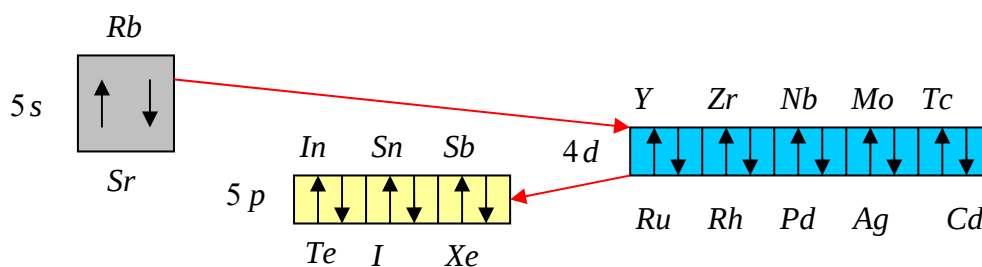
- Quarto livello

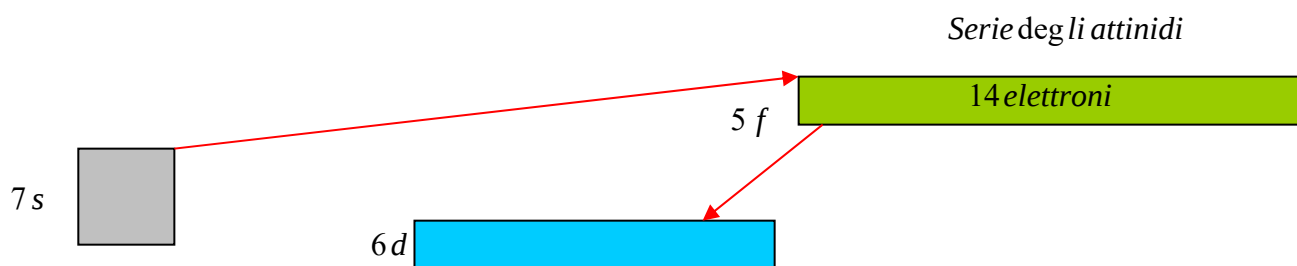
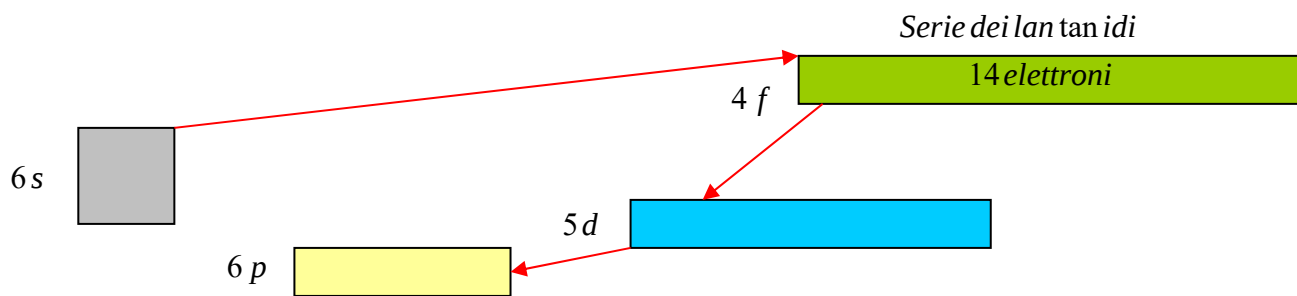
In esso, in primo luogo, viene riempito l'orbitale $4s$ dal potassio ($Z = 19$, $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^1$) e dal calcio ($Z = 20$, $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2$). Poi si inseriscono, in ritardo, quegli elementi i cui elettroni più esterni riempiono gli orbitali $3d$: sono dieci elementi, con Z da 21 a 30 (il sottolivello d non può contenere più di dieci elettroni). Si continua quindi con il gallio ($Z = 31$, $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^1$), che contiene un elettrone in un orbitale $4p$ e si conclude con il kripto ($Z = 36$, $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6$).



- Quinto periodo e successivi

Il quinto periodo inizia con il rubidio ($Z = 37$), che ha un solo elettrone nel sottolivello più esterno, il $5s$. Più avanti, nel sesto periodo, vi sono gli elementi con Z da 58 a 71, i cui elettroni riempiono gli orbitali $4f$. Questa serie, che viene posizionata spesso al di fuori della TP, contiene 14 elementi, dal cerio al lutezio, ed è chiamata **serie dei lantanidi**, poiché è da inserire dopo il lantanio $Z = 57$. Analogamente, nel settimo periodo, dopo l'attinio ($Z = 89$), si inserisce la serie degli elementi con Z da 90 a 103; questa serie è detta **serie degli attinidi** e comprende 14 elementi i cui elettroni più esterni riempiono gli orbitali $5f$. L'ultimo elemento naturale della TP è l'uranio ($Z = 92$); i successivi, detti **elementi transuranici**, sono tutti artificiali, prodotti nei laboratori di fisica nucleare.





		gruppi																																			
		I		II												III	IV	V	VI	VII	VIII																
		1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		11		12		13		14		15		16		17		18	
		sottolivelli s																		sottolivelli p																	
periodi	1	1		H																																	
	2	3		Li		4		Be																													
	3	11		Na		12		Mg																													
	4	19		K		20		Ca																													
	5	37		Rb		38		Sr																													
	6	55		Cs		56		Ba																													
	7	87		Fr		88		Ra																													
																																				He 2	
																																</					

❖ I gruppi

Il motivo della notevole omogeneità di comportamenti degli elementi appartenenti al medesimo gruppo si comprende dall'analisi delle loro configurazioni elettroniche.

- Nel **gruppo I A** si trovano tutti quegli elementi che terminano la loro configurazione con un elettrone in un orbitale di tipo s :
l'idrogeno (H), $1s^1$; il litio (Li), $1s^2 2s^1$; il sodio (Na), $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$; il potassio (K), $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^1$, e così via.
- Nel **gruppo II A** si trovano tutti quegli elementi che terminano la loro configurazione con due elettroni in un orbitale di tipo s :
il berillio (Be), $1s^2 2s^2$; il magnesio (Mg), $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2$; il calcio (Ca), $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2$, e così via.
- Nel **gruppo III A** si trovano tutti quegli elementi che hanno tre elettroni nell'ultimo livello occupato, due nel sottolivello s e uno nel p .
- Nel **gruppo IV A** si trovano tutti quegli elementi che hanno quattro elettroni nell'ultimo livello occupato, due nel sottolivello s e due nel p , e così via.
- Nel **gruppo VIII A**, infine, l'ultimo della TP, il livello esterno degli atomi è completo di otto elettroni, due in s e sei in p (fa eccezione l'elio, che possiede due elettroni, entrambi nel primo sottolivello s).

Gli elettroni di valenza

Gli elementi che appartengono al medesimo gruppo hanno un comportamento simile perché possiedono la stessa configurazione elettronica esterna, cioè un uguale numero di elettroni in sottolivelli esterni dello stesso tipo. D'altra parte, gli elementi che appartengono allo stesso periodo, considerati da sinistra verso destra, possiedono un numero crescente di elettroni nel loro livello energetico esterno (che si riempie del tutto nel gruppo VIII A): questi elettroni sono detti **elettroni di valenza**.

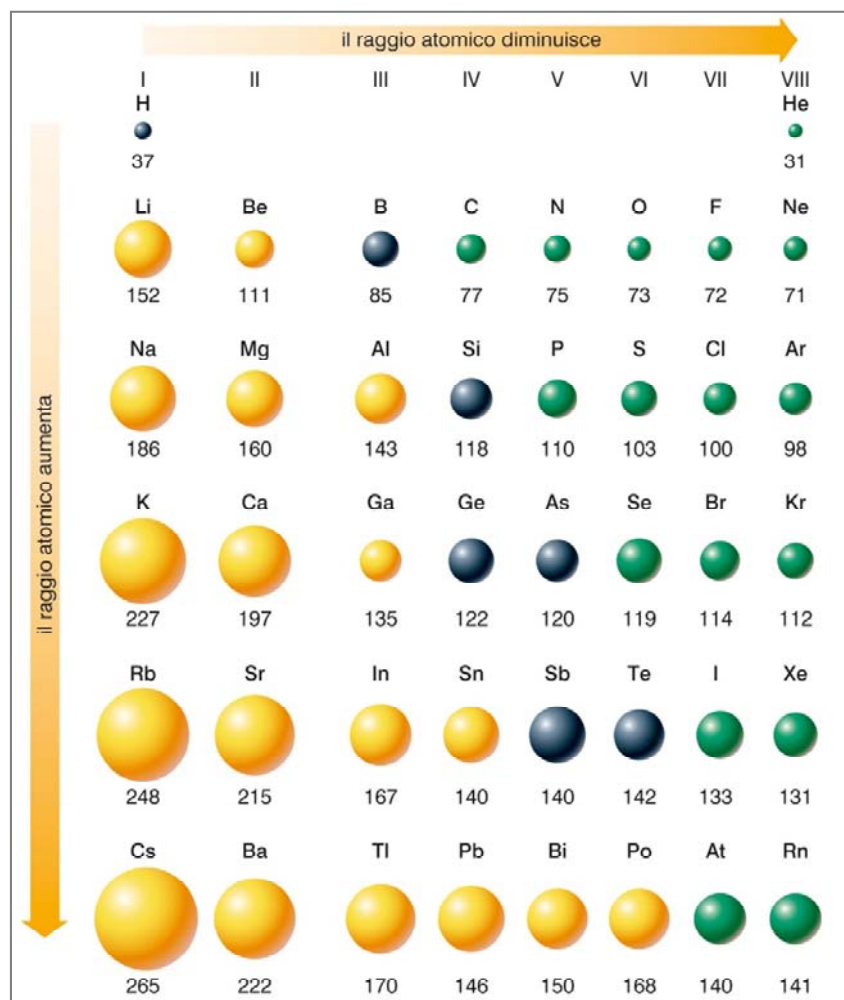
Per i gruppi di tipo A, il numero del gruppo a cui appartiene un elemento corrisponde anche al numero dei suoi elettroni di valenza: gli elementi del gruppo V A hanno 5 elettroni di valenza, quelli del V II A ne hanno 7 e così via.

➤ LE PROPRIETÀ PERIODICHE

Numerose sono le proprietà fisiche e chimiche degli elementi che manifestano un andamento periodico. Tra le proprietà fisiche vi sono il raggio atomico, il raggio ionico, la densità, la temperatura di fusione e quella di ebollizione; tra le proprietà chimiche l'energia ionizzante, l'affinità elettronica e l'elettronegatività.

❖ Il raggio atomico

Si definisce **raggio atomico** la misura della distanza media tra nucleo e gli elettroni del livello più esterno.



Quando è possibile, per determinare il raggio atomico si misura la semidistanza media tra due nuclei all'interno di un cristallo.

Nella tabella sopra i raggi atomici sono espressi in picometri.

Il raggio ionico

Quando un atomo si trasforma in ione modifica le sue dimensioni si parla quindi di raggio **ionico**.

Questionario 4

1. Il “discorso” sull’ambiente, nella presente unità viene affrontato:
 - a. Prevalentemente in prima media;
 - b. esclusivamente in seconda media;
 - c. esclusivamente in terza media.
2. Il “discorso” sull’agricoltura biologica e biodinamica viene affrontato:
 - a. Prevalentemente in prima media;
 - b. prevalentemente in seconda media;
 - c. esclusivamente in terza media.
3. Il “discorso” sul concetto di lavoro meccanico e di energia viene affrontato:
 - a. In prima media;
 - b. prevalentemente in seconda media;
 - c. esclusivamente in terza media.
4. Una pentola coperta, piena d’acqua, su un fornello acceso, giunta ad ebollizione produce il movimento del coperchio. Quale conclusione si può far trarre agli studenti ?
 - a. Temperatura e calore non sono la stessa cosa;
 - b. riconoscere che il calore è una forma di energia;
 - c. riconoscere che la temperatura è una forma di energia.
5. Un cucchiaino di legno, uno di acciaio e uno d’argento in un bicchiere di acqua calda si riscaldano in misura diversa. Quale conclusione si può far trarre agli studenti ?
 - a. Riconoscere che temperatura e calore sono legati dal fatto, che uno determina la variazione dell’altro;
 - b. riconoscere che il calore e la temperatura sono sostanzialmente la stessa cosa;
 - c. riconoscere che la temperatura è una forma di energia.

6. Utilizziamo l'anello di Gravesande: una sfera di metallo una volta riscaldata non passa più attraverso l'anello che a temperatura ambiente attraversava. Quale conclusione si può far trarre agli studenti ?
- Che somministrando calore i corpi si dilatano;
 - riconoscere che il calore e la temperatura sono sostanzialmente la stessa cosa;
 - riconoscere che la temperatura è una forma di energia.
7. Si definisce raggio atomico:
- La distanza tra due atomi contigui di una certa sostanza;
 - il raggio dell' atomo di una determinata sostanza;
 - la misura della distanza media tra nucleo e gli elettroni del livello più esterno.
8. Le proprietà periodiche sono:
- Le proprietà fisiche e chimiche degli elementi che manifestano un andamento periodico;
 - le proprietà fisiche e chimiche degli elementi che manifestano un andamento sinusoidale;
 - le proprietà fisiche e chimiche degli elementi che manifestano un andamento cosinusoidale.
9. I periodi della tavola periodica degli elementi sono:
- Sette e corrispondono ai primi sette livelli energetici degli atomi, ovvero ai valori compresi tra 1 e 7 del numero quantico principale n ;
 - sette e corrispondono ai primi sette livelli energetici degli atomi, ovvero ai valori compresi tra 1 e 6 del numero quantico principale aumentato di 1 ossia a $n + 1$;
 - sette e corrispondono ai primi sette livelli energetici degli atomi, ovvero ai valori compresi tra 1 e 7 del numero quantico principale diminuito di 1 ossia a $n - 1$.
10. La legge periodica afferma che:
- Gli elementi possiedono proprietà chimiche e fisiche che non variano periodicamente al crescere del numero atomico;
 - gli elementi possiedono proprietà chimiche e fisiche che variano periodicamente al crescere del numero atomico;
 - nessuna delle precedenti è corretta.